

**MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN
DER SAUERSTOFFVERSORGUNG VON
WARMBLÜTERORGANEN**

Ein elliptisches und ein pseudoparabolisches
quasilineares Transmissionsproblem

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
UWE GROSSMANN
Max-Planck-Institut für Systemphysiologie
Dortmund
1979



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546402_0068

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER SAUERSTOFFVERSORUNG
VON NARBBLÜTERORGANEN

- - -

EIN ELLIPTISCHES UND EIN PSEUDOPARABOLISCHES
QUASILINEARES TRANSMISSIONSPROBLEM

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

der Abteilung für Mathematik

an der Ruhr-Universität Bochum



UWE GROSSMANN

Max-Planck-Institut für Systemphysiologie

Dortmund

1979

Tag der Abgabe : 8. Jan. 1979

Tag der mündlichen Prüfung : 9. Feb. 1979

erster Referent : Prof. Dr. H. Amann

zweiter Referent : Prof. Dr. E. Zehnder



E I N L E I T U N G

Der Warmblüterorganismus ist besonders auf eine ständige Energiezufuhr angewiesen, da er Wärmeverluste, die beim Kontakt mit der Umgebung auftreten, kompensieren muß ⁽⁺⁾. In den Zellen des Organismus wird diese Energie, sowie die Energie, die die Zellen für ihre Funktion und für ihre Erhaltung benötigen, gewonnen. Der molekulare Sauerstoff reagiert in den Mitochondrien, den Kraftwerken der Zelle, mit dem Substratwasserstoff, der aus Nährstoffen, wie Glukose, Fett oder auch Eiweiß, stammt. Die Enzyme der Zelle sorgen dafür, daß diese Reaktion nicht explosionsartig, wie bei der Knallgasreaktion, sondern schrittweise verläuft (/38/). Während für Nährstoffe zell- und organ-eigene Depots angelegt sind, gibt es, außer im Muskel, keine zellulären Speicher für den Sauerstoff. Ständige aerobe Energieerzeugung ist daher nur möglich, wenn die Zellen kontinuierlich mit Sauerstoff beliefert werden. Die ordnungsgemäße Funktion der Organe hängt deshalb entscheidend vom Versorgungssystem ab, das die ständige Belieferung der Mitochondrien mit Sauerstoff ermöglicht (/45/,/46/).

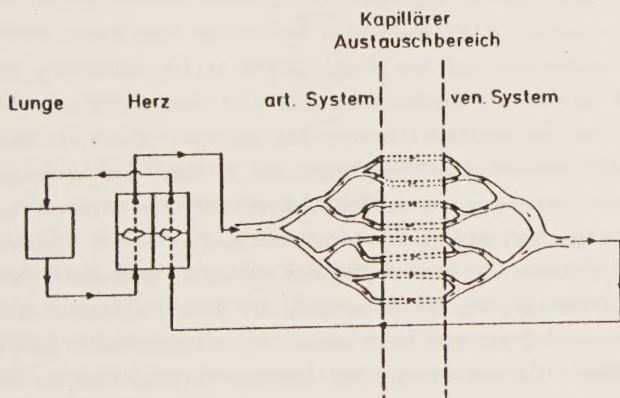


Abb. 1 : Schematische Darstellung des Kreislaufs

(⁺) Die biologischen Zusammenhänge werden in dieser, der Lösung eines mathematischen Problems gewidmeten Arbeit nur in Grundzügen dargestellt.

In der Lunge wird der Sauerstoff vom Blut aufgenommen und dort an das Hämoglobin gebunden. Normales menschliches Blut mit Hämoglobin kann eine fast fünfzigmal so große Menge an Sauerstoff transportieren wie das Blut ohne Hämoglobin, das Blutplasma. Beim Transport im Herz-Kreislauf-System wird das Blut vom Herzen durch die arteriellen Blutgefäße in die Organe gepumpt. Dort verzweigen sich die Arterien in Arteriolen und schließlich in Kapillaren, in denen der Gas- und Stoffaustausch stattfindet. Die Kapillaren vereinigen sich wieder zu Venolen und Venen, über die das Blut zum Herzen zurückfließt. (/45/, /46/). Abbildung 1 veranschaulicht schematisch diesen Zusammenhang.

Für die folgenden Betrachtungen ist der kapilläre Bereich, in dem Austauschprozesse zwischen Kapillare und Gewebe stattfinden, von besonderem Interesse. Man möchte beispielsweise wissen, unter welchen Bedingungen eine optimale Versorgung der Mitochondrien mit Sauerstoff gewährleistet ist oder was zu tun ist, um eine Unterversorgung aufzuheben. Um Fragen dieser Art zu beantworten, werden einerseits Tierversuche gemacht, andererseits wird versucht, aus theoretischen Modellen Aussagen abzuleiten. Aus dem Vergleich der Ergebnisse beider Vorgehensweisen lassen sich unter Umständen Eigenschaften des zugrundeliegenden biologischen Systems ermitteln. Auf die experimentelle Vorgehensweise möchte ich hier nicht näher eingehen, sondern mich auf den theoretischen Teil beschränken. In Abbildung 2 wird dieser Zusammenhang graphisch dargestellt. Zunächst fertigt man von dem zugrundeliegenden biologischen System ein physiologisch-physikalisches Modell an, indem man es durch physiologische, physikalische, chemische und morphologische Kriterien beschreibt. Dann erfolgt die Übersetzung in ein mathematisches Modell (Randwertproblem o.ä.). Bevor man die Möglichkeit hatte, in größerem Umfang Computer einzusetzen, war man gezwungen, die zugrundegelegten Modelle so zu vereinfachen, daß sich eine Lösung des mathematischen Problems direkt gewinnen ließ und man aus ihr Aussagen ableiten konnte. Im Allgemeinen sind die mathematischen Probleme, die aus dem physiologischen Bereich stammen, so komplex, daß dieser Weg nicht gangbar ist. In diesem Fall muß man sich zunächst um Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen des mathematischen Problems bemühen. In vielen Fällen kommt man jedoch über ein diskretisiertes Problem mit Hilfe des Computers und geeigneter Methoden der Numerischen Mathematik zu im physiologischen Sinne verwertbaren Ergebnissen. Auch wenn in neuerer Zeit Speicherkapazität des benutzten Rechners und verfügbare Rechen-

zeit eine wesentlich höhere Komplexität der Modelle erlauben, fehlen in vielen Fällen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen des zugrundeliegenden mathematischen Modells. Dies erklärt sich

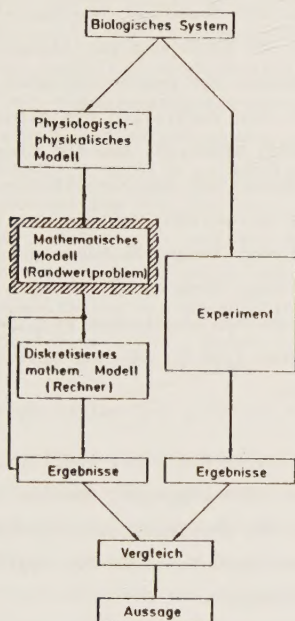


Abb. 2 : Standort des Themas dieser Arbeit (schraffiert)
im Gesamtzusammenhang

wahrscheinlich daher, daß die Ergebnisse im physiologischen Sinne durchaus sinnvoll erscheinen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich also primär mit Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für mathematische Probleme, die sich aus der Formulierung physiologischer Bedingungen ergeben. Aus diesem Grunde erscheint mir eine Teilung dieser Arbeit in einen physiologisch-physikalischen Teil, in dem die physiologischen Voraussetzungen genannt werden, und einen mathematischen Teil, in dem die mathematische Behandlung des entstandenen Problems erfolgt, sinnvoll.

Im mathematischen Teil dieser Arbeit werden zwei quasilineare Transmissionsprobleme behandelt, wobei das eine aus dem zeitabhängigen, das andere aus dem stationären System entsteht. Die auftretenden

Differentialgleichungen sind zum einen vom pseudoparabolischen, zum anderen vom elliptischen Typ. Die zugehörigen Anfangs-, Rand- und Transmissionsbedingungen sind "natürlich", d.h. die betreffenden Randoperatoren treten bei der Transformation des klassischen in das verallgemeinerte Problem bei der Anwendung des Gauss'schen Satzes auf. Zentrales Hilfsmittel zur Gewinnung verallgemeinerter Lösungen ist in beiden Fällen die Theorie der pseudomonotonen Operatoren (/41/). Im pseudoparabolischen Fall wird zusätzlich die Methode der elliptischen Regularisierung (/42/) benötigt, die für diesen Fall modifiziert werden muß. Mit Methoden der Regularitätstheorie (/19/, /21/, /36/, /65/, /66/) läßt sich nachweisen, daß die verallgemeinerte Lösung im elliptischen Fall auch Lösung im klassischen Sinne ist. Im pseudoparabolischen Fall gelingt dies nicht. Dagegen läßt sich für die klassische Lösung des pseudoparabolischen Problems eine Eindeutigkeitsaussage formulieren (/56/), während dies für das elliptische Problem nicht gelingt.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. med. D.W. Lübbers danken für die vielen Diskussionen und Anregungen, die zur Auswahl dieses Themas und zur Formulierung des physiologischen Modells führten, sowie für die Möglichkeit, am Max-Planck-Institut für Systemphysiologie in Dortmund diese Arbeit anzufertigen.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. H. Amann danke ich für die Anleitung und für die vielen Hinweise bei der Bearbeitung der mathematischen Probleme.

Nicht zuletzt gilt mein Dank allen Kolleginnen und Kollegen am Max-Planck-Institut für Systemphysiologie, die mir bei der Anfertigung dieser Arbeit geholfen haben.

BEZEICHNUNGEN

$\bar{a}$	: Rnussen'scher Löslichkeitskoeffizient
α_1	: Sauerstofflöslichkeitskoeffizient in Blutplasma
α_2	: Sauerstofflöslichkeitskoeffizient im Gewebe
$\bar{b}$	: totale Hämoglobinkonzentration
b	: maximale Konzentration des an das Hämoglobin gebundenen Anteils an Sauerstoff
C_E	: Konzentration des Stoffes E
C_{gel}	: Konzentration des gelösten Anteils von E
C_{geb}	: Konzentration des gebundenen Anteils von E
C_{H_i}	: Konzentration der Hämoglobinfraktion, die pro Hämoglobinmolekül i Moleküle Sauerstoff gebunden hat ($i=0,1,2,3,4$)
$C_{O_2, \text{gel}}$	: Konzentration des gelösten Anteils an Sauerstoff
$C_{O_2, \text{geb}}$	: Konzentration des gebundenen Anteils an Sauerstoff
$\bar{D}_E$	: Diffusionskoeffizient des Stoffes E
D_E	: Diffusionstensor des Stoffes E
D_{O_2}	: Diffusionstensor von Sauerstoff
D_{H_i}	: Diffusionstensor der Hämoglobinfraktion H_i ($i=0,1,2,3,4$)
D_1	: Diffusionstensor von Sauerstoff in der Kapillare
D_2	: Diffusionstensor von Sauerstoff im Gewebe
D_3	: Diffusionstensor von Hämoglobin in der Kapillare ($D_3 = D_{H_1}$)
E	: beliebiger biologischer Stoff
F	: Atmungsfunktion im Gewebe
G_1	: Kapillare
G_2	: Gewebe
r_0	: $S_0 \times (0; T)$
r_1	: $S_1 \times (0; T)$
r_2	: $S_2 \times (0; T)$
r_{11}	: $S_{11} \times (0; T)$
r_{12}	: $S_{12} \times (0; T)$
h	: Sauerstoffbindungskapazität des Hämoglobins
H_i	: Hämoglobinfraktion, die pro Hämoglobinmolekül i Moleküle Sauerstoff gebunden hat ($i=0,1,2,3,4$)

J_E	: Gesamtfluss des Stoffes E
$J_{E,diff}$	: Diffusionsfluss von E
$J_{E,konv}$	: Konvektionsfluss von E
p	: Partialdruck
p_1	: Sauerstoffpartialdruck in der Kapillare
p_2	: Sauerstoffpartialdruck im Gewebe
p_a	: arterieller Sauerstoffpartialdruck
p_v	: venöser Sauerstoffpartialdruck
P	: Permeabilität der Kapillarwand
Q_1	: $G_1 \cdot X(0;T)$
Q_2	: $G_2 \cdot X(0;T)$
R_E	: Produktions- bzw Verbrauchsrate des Stoffes E
R_{O_2}	: Produktions- bzw Verbrauchsrate von gelöstem Sauerstoff in der Kapillare
R_{H_i}	: Produktions- bzw Verbrauchsrate der Hämoglobinfraktion H_i ($i=0,1,2,3,4$)
S	: Sauerstoffbindungskurve des Hämoglobins
S_0	: Kapillarwand
S_1	: $S_{11} \cup S_{12}$
S_2	: Außenwand des Versorgungsbereichs
S_{11}	: Kapillareingang
S_{12}	: Kapillarausgang
τ	: positive Zahl (Zeitwert)
$\vec{v}$	: Geschwindigkeitsfeld in der Kapillare

∇	: Gradient
div	: Divergenz
$\circ$	: Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor bzw zweier Vektoren

$$\frac{\partial}{\partial v_{n_1}} : \sum_{i,k=1}^n d_{lik} \cdot \cos(n, x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} = (D_i \circ \nabla) \circ H$$

(Korormalenableitung)

(N, x_i)	: Winkel zwischen der inneren Normalen N und der positiven Richtung der x_i -Achse
------------	--

$\longrightarrow$	: schwache Konvergenz
$\longrightarrow$	: Normkonvergenz

INHALTSVERZEICHNIS

<u>PHYSIOLOGISCH -PHYSIKALISCHER TEIL</u>	1
1. Konzentration und Partialdruck	2
2. Hämoglobin	3
3. Die allgemeine Transportgleichung	6
4. Die 'Kapillar'-Gleichung	9
5. Die 'Gewebe'-Gleichung	12
6. Die mikrozirkulatorische Einheit	14
7. Anfangs-, Rand- und Transmissionsbedingungen	17
8. Das stationäre Modell	20
9. Einige weitere Voraussetzungen	21
10. Zusammenfassung der physiologischen Voraussetzungen und Literaturüberblick	22
 <u>MATHEMATISCHER TEIL</u>	 24
11. Die klassischen Probleme	25
12. Die verallgemeinerten Probleme	30
13. Existenz verallgemeinerter Lösungen	
a) im elliptischen Fall	36
b) im pseudoparabolischen Fall	40
14. Regularität	47
15. Eindeutigkeit	55
16. Zusammenfassung und Diskussion der mathematischen Ergebnisse	58

PHYSIOLOGISCH - PHYSIKALISCHER

TEIL

1. Konzentration und Partialdruck

Die biologischen Medien, die in dieser Arbeit betrachtet werden, Gewebe und Blutplasma, können als Flüssigkeiten angesehen werden. Gase, wie Sauerstoff, lassen sich in fast allen biologischen Medien lösen. Äquilibriert man eine Flüssigkeit mit einem Gas, d.h. bringt man beide Medien mit möglichst großer Oberfläche in Kontakt bis ein thermodynamisches Gleichgewicht eingetreten ist, so kann man dem Gas in der Flüssigkeit den gleichen Partialdruck zuordnen, der in der Gasphase vorliegt. Die gelöste Menge des Gases und damit die Konzentration des Gases in der Flüssigkeit ist abhängig vom Partialdruck des Gases und einer Konstanten, dem Bunsen'schen Löslichkeitskoeffizienten. Das Henry-Dalton'sche Gesetz verknüpft diese drei Parameter :

$$(1.1) \quad c_{\text{gel}} = \frac{\bar{a}}{760} \cdot p = a \cdot p$$

c_{gel} : Konzentration des in der Flüssigkeit gelösten Anteils an Gas

($\text{ml}_{\text{Gas}} / \text{ml}_{\text{Flüssigkeit}}$)

p : Partialdruck des Gases

(Torr)

$\bar{a}$: Bunsen'scher Löslichkeitskoeffizient

($\text{ml}_{\text{Gas}} / \text{ml}_{\text{Flüssigkeit}} / \text{atm}$)

Der Faktor $\frac{1}{760}$ in Gleichung (1.1) entsteht durch die Äquivalenz
 $1 \text{ atm} \hat{=} 760 \text{ Torr}$. Außerdem gilt $1 \text{ Torr} \hat{=} 133 \text{ Pascal} \hat{=} 1,33 \text{ mb}$.

In unterschiedlichen biologischen Medien wird man mit unterschiedlichen Löslichkeitskoeffizienten zu rechnen haben. Aus diesem Grunde und wegen der Definition des Partialdrucks von Gasen in Flüssigkeiten ist die Vergleichsgröße für den Gasgehalt in unterschiedlichen Substanzen nicht die Konzentration, sondern der Partialdruck.

2. Hämoglobin

Für die folgenden Betrachtungen von Interesse ist, daß im Blutplasma die roten Blutkörperchen (Erythrocyten) suspendiert sind. Wie schon in der Einleitung angedeutet ist nur ein geringer Teil des im Blut enthaltenen Sauerstoffs im Blutplasma gelöst. Der weitaus größte Teil wird in den Erythrocyten vom Hämoglobin chemisch reversibel gebunden. Hämoglobin besitzt die Fähigkeit, den Sauerstoff in den Lungenalveolen anzulagern und in den Kapillaren wieder abzugeben. Dieser komplizierte Vorgang ist bis heute noch nicht vollständig erforscht worden, jedoch sind in der Vergangenheit grundlegende Arbeiten erschienen, die sich mit der Molekülstruktur des Hämoglobins und dem Mechanismus der reversiblen Sauerstoffbindung beschäftigten (/1/,/3/,/33/,/34/,/51/,/53/,/54/,/61/,/64/). " Wirbeltier-Haemoglobin ist ein Protein mit einem Molekulargewicht von 64500. Vier seiner 10000 Atome sind Eisenatome, die zusammen mit Protoporphyrin vier Haemgruppen bilden. Die restlichen Atome befinden sich in vier einzelnen Polypeptidketten, deren jede über 140 Aminosäure-Reste enthält. ... Hämoglobin transportiert Sauerstoff aus der Lunge in die Gewebe und Kohlendioxyd aus den Geweben zur Lunge. Seine vier Eisenatome befinden sich im zweiwertigen Zustand, und jedes von ihnen kann reversibel ein Molekül Sauerstoff binden, ohne dadurch selbst oxydiert zu werden. Sie stehen untereinander in einer physiologisch vorteilhaften Wechselwirkung, indem die Vereinigung eines Eisenatoms mit Sauerstoff die Geschwindigkeit der Sauerstoff-Aufnahme durch die drei anderen erhöht. Eine ähnliche Wechselwirkung tritt bei der Abgabe des Sauerstoffs auf."(/53/)

Im Weiteren bezeichne ich mit H_i ($i=0,1,2,3,4$) die Hämoglobinfraktion, die aus solchen Hämoglobinmolekülen besteht, die i Sauerstoffatome angelagert haben. C_{H_i} sei dann die Konzentration der Fraktion H_i ($i=0,1,2,3,4$). Die Sauerstoffsättigung S definiert man als das Verhältnis des tatsächlich gebundenen Sauerstoffs zum maximal möglich gebundenen Sauerstoff :

$$(2.1) \quad S = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sum_{i=1}^4 i \cdot C_{H_i}}{\sum_{i=0}^4 C_{H_i}}$$

Die Sauerstoffsättigung S hängt vom Partialdruck des im Blutplasma gelösten Sauerstoff ab. Diesen Zusammenhang veranschaulicht Abbildung 3. Wichtig für die Funktion ist die sigmoide Gestalt der Kurve.

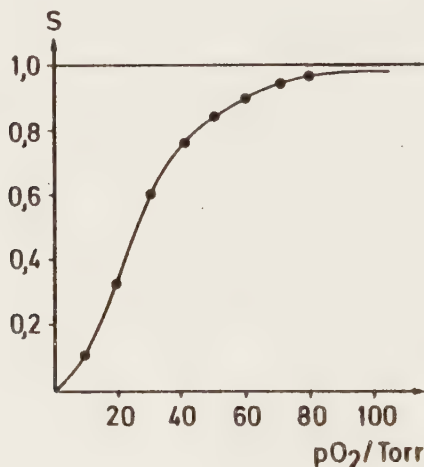


Abb. 3 : Sauerstoffbindungskurve des Hämoglobins
($pH=7,4$; $T=37^{\circ}C$; aus [63/])

Die totale Hämoglobinkonzentration ist definiert als :

$$(2.2) \quad \bar{b} = \sum_{i=0}^4 c_{H_i}$$

Aus der Tatsache, daß 1 Mol Hämoglobin maximal 4 Mol Sauerstoff binden kann, erhält man unter der Berücksichtigung des Molvolumens für ideale Gase (22,4 l) und dem Molekulargewicht von Hämoglobin, daß 1g der Hämoglobinfraction H_i $\frac{1}{4} \cdot 1,39$ ml Sauerstoff bindet ($i=1,2,3,4$). Eine mit Sauerstoff äquilibrierte Hämoglobininlösung wird für nicht zu hohe Sauerstoffpartialdrucke eine Mischung aller Fractionen darstellen. Mit (2.1) und (2.2) kann man die Konzentration des chemisch gebundenen Anteils an Sauerstoff angeben :

$$(2.3) \quad c_{\text{geb}} = \frac{h}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 i \cdot c_{H_i}$$

$$= b \cdot S$$

$$(2.4) \quad b = h \cdot \bar{b}$$

C_{geb} : Konzentration des chemisch an das Hämoglobin gebundenen
Anteils an Sauerstoff
($\text{ml}_{\text{O}_2} / \text{ml}_{\text{Blut}}$)

$\bar{b}$: totale Hämoglobinkonzentration
($\text{g}_{\text{Hb}} / \text{ml}_{\text{Blut}}$)

b : maximal mögliche Konzentration des chemisch gebundenen
Anteils an Sauerstoff
($\text{ml}_{\text{O}_2} / \text{ml}_{\text{Blut}}$)

h : Sauerstoffbindungskapazität des Hämoglobins
($\text{ml}_{\text{O}_2} / \text{g}_{\text{Hb}}$)

theoretischer Wert : $1,39 \text{ ml}_{\text{O}_2} / \text{g}_{\text{Hb}}$

gemessener Wert : $1,34 \text{ ml}_{\text{O}_2} / \text{g}_{\text{Hb}}$

Gleichung (2.3) gestattet es nun, die Konzentration des chemisch
an das Hämoglobin gebundenen Anteils an Sauerstoff im Blut durch
die Sauerstoffbindungskurve als Funktion des Sauerstoffpartialdrucks
darzustellen :

$$(2.5) \quad C_{\text{geb}} = b \cdot S(p)$$

3. Die allgemeine Transportgleichung

Für den Transport von Substanzen in biologischen Medien ist zu einem großen Teil die Diffusion verantwortlich. Damit wird ein Verteilungsvorgang, der als passiver Transportmechanismus wirkt und durch den ein Stoff gleichmäßig in einem Medium verteilt wird, bezeichnet. Vorhandene Konzentrationsunterschiede werden ausgeglichen (/4/,/31/,/52/). Das 1. Fick'sche Gesetz beschreibt die Abhängigkeit des Diffusionsflusses vom Konzentrationsgradienten. Im eindimensionalen Fall lautet es :

$$(3.1) \quad j_{E,diff} = - \bar{D}_E \cdot \frac{dC_E}{dx}$$

$j_{E,diff}$: Diffusionsfluss des Stoffes E in positiver x-Richtung
(ml_E / sek / cm²)

C_E : Konzentration des Stoffes E
(ml_E / ml_{Medium})

$\bar{D}_E$: Diffusionskoeffizient von E im Medium
(cm² / sek)

(3.1) besagt, daß die Menge des Stoffes E, die pro Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche senkrecht zur positiven x-Richtung hindurchgeht, proportional dem Konzentrationsgradienten in dieser Richtung ist. Das Minuszeichen kommt zustande, da der Transport in Richtung niedriger Konzentrationen erfolgt, der Gradient in dieser Richtung also negatives Vorzeichen besitzt. Im dreidimensionalen Fall stellt sich der Diffusionsfluss als Vektor dar. (3.1) geht über in :

$$(3.2) \quad j_{E,diff} = - \bar{D}_E \cdot \nabla C_E$$

∇ : Gradient ($\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$)

Gleichung (3.2) gilt in dieser Form in isotropen Medien, d.h. in Medien, in denen die Diffusion keine bestimmten Raumrichtungen bevorzugt. Flüssigkeiten können im Allgemeinen als isotrop angesehen werden (/31/). Sind jedoch bestimmte Raumrichtungen ausgezeichnet, z.B. in Kristallen, so muß der Diffusionskoeffizient $\bar{D}_E$ durch einen Diffusionstensor D_E , eine symmetrische 3x3 - Matrix, ersetzt werden. (3.2) geht dann über in :

$$(3.3) \quad J_{E,diff} = - D_E \circ \nabla C_E$$

- D_E : Diffusionstensor von E im Medium (symmetrische 3x3-Matrix)
 $\circ$: Zeichen für die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor bzw. für die Multiplikation zweier Vektoren

Obwohl, wie weiter oben betont, die Medien, die in dieser Arbeit betrachtet werden, als isotrop angesehen werden können, wird im Folgenden der Diffusionstensor benutzt, da der isotrope Fall als Spezialfall des anisotropen angesehen werden kann und die Beschränkung auf den isotropen Fall mathematisch eine zu starke Einschränkung bedeuten würde. Es bleibt anzumerken, daß bei Übereinstimmung der Hauptdiffusionsachsen mit den Koordinatenachsen die Matrix D_E Diagonalgestalt hat.

Eine zweite Art von Transport erfolgt durch die Eigenbewegung des Mediums, in dem der Stoff E gelöst ist. Hierbei spricht man vom Transport durch Konvektion (/4/):

$$(3.4) \quad J_{E,konv} = \vec{V} \cdot C_E$$

$J_{E,konv}$: Konvektionsfluss des Stoffes E in der durch $\vec{V}$ vorgegebenen Richtung.

$$(ml_E / sek / cm^2)$$

$\vec{V}$: Geschwindigkeitsfeld des Mediums
 (cm / sek)

Der Gesamtfluss des Stoffes E setzt sich zusammen aus dem Diffusions- und dem Konvektionsfluss. Es gilt:

$$(3.5) \quad J_E = J_{E,diff} + J_{E,konv} \\ = - D_E \circ \nabla C_E + \vec{V} \cdot C_E$$

Die Kontinuitätsgleichung besagt, daß die Summe aus der zeitlichen Akkumulation eines Stoffes E und der Divergenz des Gesamtflusses von E gleich der Produktionsrate des Stoffes E ist (/4/). Es gilt:

$$(3.6) \quad \frac{\partial C_E}{\partial t} + \text{div} (J_E) = R_E$$

div : Divergenz eines Vektors ($\text{div } J = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$)
 R_E : Produktions- bzw. Verbrauchsrate des Stoffes E
 ($\text{ml}_E / \text{ml}_{\text{Medium}} / \text{sek}$)

Berücksichtigt man (3.5), so erhält man die folgende allgemeine Transportgleichung (/4/) :

$$(3.7) \quad \frac{\partial C_E}{\partial t} = \text{div} (D_E \circ \nabla C_E - \vec{V} \cdot C_E) + R_E$$

(3.7) stellt eine partielle Differentialgleichung für C_E dar, wobei C_E von den drei Raumvariablen und der Zeit abhängt. Der Diffusionstensor D_E ist im allgemeinen ebenfalls abhängig von diesen Variablen, ebenso das Geschwindigkeitsfeld $\vec{V}$. R_E kann unter Umständen von C_E abhängig sein. (3.7) wird im Folgenden dazu benutzt, die Transportgleichungen für die einzelnen Kompartimente herzuleiten.

4. Die 'Kapillar'-Gleichung

Will man die den Transport von Sauerstoff in bewegten Hämoglobin-Plasma-Suspensionen innerhalb der Kapillare beschreibende, partielle Differentialgleichung (Kapillargleichung) herleiten, so hat man einerseits den Anteil an Sauerstoff zu berücksichtigen, der im Plasma gelöst ist, andererseits den chemisch an das Hämoglobin gebundenen Anteil. Ausgangspunkt für alle Überlegungen ist Gleichung (3.7). Sie gilt sowohl für die Konzentration des im Blutplasma gelösten Sauerstoffs, als auch für die Konzentrationen der einzelnen Hämoglobinfractionen H_i ($i=0,1,2,3,4$) mit unterschiedlicher Sauerstoff-anlagerung pro Hämoglobinmolekül. Es gilt also :

$$(4.1) \quad \frac{\partial c_{O_2, \text{gel}}}{\partial t} = \text{div} (D_{O_2} \circ \nabla c_{O_2, \text{gel}} - \vec{v} \cdot c_{O_2, \text{gel}}) + R_{O_2}$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial c_{H_i}}{\partial t} = \text{div} (D_{H_i} \circ \nabla c_{H_i} - \vec{v} \cdot c_{H_i}) + R_{H_i}$$

$i=0,1,2,3,4$

$c_{O_2, \text{gel}}$: Konzentration des im Blutplasma gelösten Sauerstoffs

D_{O_2} : Diffusionstensor von Sauerstoff im Blutplasma

D_{H_i} : Diffusionstensoren der Hämoglobinfractionen H_i
in Blutplasma ($i=0,1,2,3,4$)

R_{O_2} : Produktions- bzw. Verbrauchsrate von gelöstem Sauerstoff

R_{H_i} : Produktions- bzw. Verbrauchsrate der Hämoglobinfractionen H_i ($i=0,1,2,3,4$)

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, daß sich die Diffusionstensoren D_{H_i} der Hämoglobinfractionen H_i ($i=0,1,2,3,4$) nicht wesentlich unterscheiden (/64/). Deshalb werden zur Vereinfachung die folgenden Bezeichnungsweisen eingeführt :

$$(4.3) \quad D_1 := D_{O_2}$$

$$(4.4) \quad D_3 := D_{H_i} \quad ; i=0,1,2,3,4$$

Wenn im Blut Sauerstoff nur in gelöster oder reversibel gebundener Form auftritt, der Sauerstoffverbrauch in den Erythrocyten als vernachlässigbar angesehen werden kann, gilt die Beziehung :

$$(4.5) \quad R_{O_2} + \frac{h}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 i \cdot R_{H_i} = 0$$

Wird in dem betrachteten Zeitraum Hämoglobin weder neugebildet, noch abgebaut, gilt :

$$(4.6) \quad \sum_{i=0}^4 R_{H_i} = 0$$

Die Gleichung (4.5) ergibt die Verbindung zwischen den Gleichungen (4.1) und (4.2). Multipliziert man Gleichung (4.2) mit $\frac{h}{4} \cdot i$, summiert über i von 1 bis 4 und addiert zum Ergebnis die Gleichung (4.1), so erhält man mit (2.3) und (4.5) :

$$(4.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} (C_{O_2, \text{gel}} + C_{O_2, \text{geb}}) = \text{div} (D_1 \circ \nabla C_{O_2, \text{gel}} + D_3 \circ \nabla C_{O_2, \text{geb}} - \bar{V} \cdot (C_{O_2, \text{gel}} + C_{O_2, \text{geb}}))$$

$C_{O_2, \text{geb}}$: Konzentration des Sauerstoffs, der an das Hämoglobin gebunden ist

Aus (4.7) folgt mit (1.1) und (2.3) weiter :

$$(4.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} (a_1 p_1 + bS(p_1)) = \text{div} (a_1 D_1 \circ \nabla p_1 + D_3 \circ \nabla (bS(p_1)) - \bar{V} \cdot (a_1 p_1 + bS(p_1)))$$

a_1 : Löslichkeitskoeffizient für Sauerstoff im Plasma
 p_1 : Sauerstoffpartialdruck in der Kapillare

Die partielle Differentialgleichung (4.8) für die abhängige Variable p_1 und unabhängigen Raum- und Zeitvariablen beschreibt den Sauerstofftransport in der Kapillare. Die Koeffizienten können dabei ebenfalls als veränderlich in Raum und Zeit angesehen werden.

Mit einem analogen Vorgehen wie bei der Herleitung von (4.8) erhält man die folgende Differentialgleichung für $\bar{b}$, die totale Hämoglobinkonzentration, und damit auch für b :

$$(4.9) \quad \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = \operatorname{div} (D_3 \circ \nabla \bar{b} - \bar{v} \cdot \bar{b})$$

$$(4.10) \quad \frac{\partial b}{\partial t} = \operatorname{div} (D_3 \circ \nabla b - \bar{v} \cdot b)$$

5. Die 'Gewebe'-Gleichung

Auch für den Transport von Sauerstoff im Gewebe stellt (3.7) den Ausgangspunkt dar. Im Gegensatz zur Kapillare wird jedoch angenommen, daß der Transport von Sauerstoffmolekülen durch extrazelluläre Flüssigkeitsströme (Konvektion) vernachlässigbar ist, d.h. daß in diesem Kompartiment Sauerstoff allein durch Diffusion transportiert wird. Daraus resultiert zunächst :

$$(5.1) \quad \bar{V} \approx 0$$

Für das Gewebe gilt jedoch, daß Sauerstoff in den Mitochondrien zur Energiengewinnung verbraucht wird. Im Gegensatz zu der Kapillare, wo der Sauerstoff reversibel an das Hämoglobin gebunden wird, findet in den Mitochondrien eine irreversible Bindung statt. Diesen Sauerstoffverbrauch kann man oberhalb eines 'kritischen' Sauerstoffpartialdrucks (ca. 0,05 Torr) als unabhängig vom Partialdruck ansehen (/9/,/67/). Unterhalb dieses Wertes geht der Sauerstoffverbrauch mit dem Sauerstoffpartialdruck gegen 0. Räumliche und zeitliche Inhomogenitäten des Sauerstoffverbrauchs werden in dieser Arbeit vernachlässigt. Die im zweiten Teil der Arbeit verwendeten mathematischen Methoden lassen sich jedoch ohne Schwierigkeit auf diesen Fall übertragen.

$$(5.2) \quad R_{O_2} = - F(p_2)$$

F : Sauerstoffverbrauch im Gewebe

p₂ : Sauerstoffpartialdruck im Gewebe

Mit (3.7), (5.1), (5.2) und (1.1) erhält man die folgende partielle Differentialgleichung, die Transport von Sauerstoff im Gewebe beschreibt :

$$(5.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} (a_2 p_2) = \text{div} (a_2 D_2 \nabla p_2) - F(p_2)$$

a₂ : Löslichkeitskoeffizient von Sauerstoff im Gewebe

D₂ : Diffusionstensor von Sauerstoff im Gewebe

Gleichung (5.3) berücksichtigt keine reversiblen Bindungen von Sauerstoff an im Gewebe vorhandene Sauerstoffspeicher, wie zum Beispiel Myoglobin, das im Muskelgewebe vorkommt. Wollte man dies berücksichtigen, so müßte man ebenso vorgehen, wie bei der reversiblen Bindung von Sauerstoff an Hämoglobin. Auch für Myoglobin läßt sich eine Sauerstoffbindungskurve angeben. Diese hätte zwar im Gegensatz zum Hämoglobin keine sigmoide, sondern eine hyperboloide Form, mathematisch ergäbe sich jedoch kein neuer Sachverhalt. Im Resultat erhielte man eine ähnliche Gleichung wie (4.8). Alle mathematischen Methoden, die im zweiten Teil dieser Arbeit benutzt werden, bleiben anwendbar. Ebenso lassen sich alle Ergebnisse übertragen. Aus diesem Grund wird die Bindung von Sauerstoff an Myoglobin vernachlässigt.

6. Die mikrozirkulatorische Einheit

Schon Anfang des Jahrhunderts hat der Physiologe Krogh (/35/) aufgrund experimenteller Befunde festgestellt, daß jede Kapillare einen sie umgebenden Gewebeteil, ihren Versorgungsbereich, mit Sauerstoff versorgt. Diese Beobachtung läßt sich mit Hilfe des 1. Fick'schen Gesetzes beschreiben. Dies lautet für das Gewebe :

$$(6.1) \quad J_{O_2, \text{diff}} = - a_2 \cdot D_2 \cdot \nabla p_{O_2}$$

Nun wird die Größe des Versorgungsbereichs davon abhängen, wieviel Sauerstoff die betreffende Kapillare anzubieten hat, wieviel Sauerstoff benachbarte Kapillaren enthalten und wie weit die Kapillaren voneinander entfernt sind. Zwischen zwei Kapillaren wird es im allgemeinen immer eine Fläche geben, die dadurch bestimmt ist, daß in jedem Punkt der Fläche der Sauerstoff-Flussvektor in der Tangentialebene liegt, d. h. senkrecht zum Normalenvektor der Fläche steht. Vereinfacht ausgedrückt bedeutet das, daß es eine Fläche gibt, auf der der Sauerstoffnettofluss senkrecht zur Fläche verschwindet. Im eindimensionalen Fall wirkt sich das so aus, daß der Konzentrationsgradient an einem Punkt zwischen zwei Kapillaren verschwindet. Abbildung 4 veranschaulicht dies (leider ist der Anstieg der Kurve jeweils rechts der Versorgungsbereichsgrenze nicht deutlich zu erkennen).



Abb. 4 : Darstellung des Versorgungsbereichs einer Kapillare

Hinzugefügt werden muß jedoch, daß Situationen, in denen Sauerstoff durch Diffusion von einer Kapillare in eine benachbarte fließt, hier nicht betrachtet werden. Denn in solchen Fällen wird es eine Fläche der angesprochenen Art nicht geben. In allen anderen Fällen wird durch die genannte Fläche der Versorgungsbereich der Kapillare eindeutig definiert.

Mit jeder Änderung des Sauerstoffangebotes in einer Kapillare oder den umliegenden Kapillaren wird sich auch der zugehörige Versorgungsbereich ändern. Aus diesem Grunde muß nun eine weitere wesentliche Einschränkung bezüglich des Versorgungsbereichs gemacht werden.

Es werden nur solche Situationen betrachtet, in denen die zeitliche Änderung aller eingehenden Parameter nur so erfolgt, daß der Versorgungsbereich der betrachteten Kapillare zeitlich konstant bleibt.

Außerdem werden keine Situationen berücksichtigt, in denen sich der Kapillarbereich zeitlich verändert (Kontraktion-Dilatation).

Damit ist es möglich, die Kapillare mitsamt ihrem sie umgebenden Versorgungsbereich aus dem umliegenden Gewebe herauszunehmen und die so entstandene 'Mikrozirkulatorische Einheit' (ME) getrennt zu analysieren (/39/). Ein ganzes Organ hat man sich aus solchen mikrozirkulatorischen Einheiten zusammengesetzt vorzustellen. Die Abbildung 5 zeigt schematisch eine solche ME.

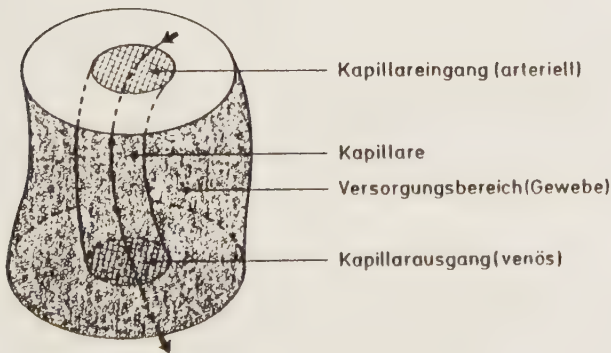


Abb. 5 : Die Mikrozirkulatorische Einheit

Die Mikrozirkulatorische Einheit setzt sich also aus dem Kapillar- und dem Gewebekompartiment zusammen. Das Kapillarkompartiment wird begrenzt durch zwei Kapillarquerschnitte, jeweils einer am arteriellen Anfang und am venösen Ende der Kapillare, und durch die Kapillarwand. Das Gewebekompartiment umgibt das Kapillarkompartiment zumindest teilweise, sodaß die Kapillarwand gemeinsame Grenzfläche beider Kompartimente ist. Weiterhin wird das Gewebearéal durch die Grenzfläche des Versorgungsbereichs, die dadurch gekennzeichnet ist, daß der Sauerstoff-Fluss senkrecht zu ihr Null wird, vom umliegenden Gewebe abgeteilt.

Man kann davon ausgehen, daß alle Grenzflächen 'stückweise glatt' und 'stetig' sind und die 'innere und äußere Kegeleigenschaft' besitzen. Stellt man sich ein Organ aus Mikrozirkulatorischen Einheiten zusammengesetzt vor, so gelingt dies nur dann raumausfüllend, wenn die Begrenzungsflächen Kanten haben dürfen. Abbildung 6 zeigt dies in der Ebene.



① : Kapillare

--- : Grenze der Versorgungsbereiche

Abb. 6 : Querschnitt dreier benachbarter
Mikrozirkulatorischer Einheiten

7. Anfangs-, Rand- und Transmissionsbedingungen

Will man eine zeitliche Entwicklung des Sauerstoffdruckfeldes in der ME beobachten, so wird man zum Zeitpunkt $t=0$ eine Anfangsverteilung in der ME vorgeben müssen.

$$(7.1) \quad p_1(0, x) = p_{10}(x) \quad (\text{Kapillare})$$

$$(7.2) \quad p_2(0, x) = p_{20}(x) \quad (\text{Gewebe})$$

p_{10} und p_{20} sind Funktionen, die das Sauerstoffdruckfeld zum Zeitpunkt $t=0$ in der ME darstellen. In vielen Fällen werden p_{10} und p_{20} Lösungen des stationären Problems (siehe 8. Das stationäre Modell) sein.

Die äußere Grenzfläche des Versorgungsbereichs wurde durch eine Bedingung definiert, die besagt, daß auf ihr der Sauerstoffdiffusionsfluss in Richtung der inneren Normalen verschwindet. Das bedeutet :

$$(7.3) \quad \frac{\partial p_2}{\partial v_{D_2}} := (D_2 \circ \nabla p_2) \circ N_2 = \sum_{i,k=1}^3 d_{2ik} \cdot \cos(N_2, x_i) \cdot \frac{\partial p_2}{\partial x_k} = 0$$

d_{2ik} : Elemente des Diffusionstensors D_2

N_2 : Normalenvektor (innerer)

$\cos(N_2, x_i)$: Cosinus des Winkels zwischen der inneren Normalen und der positiven Richtung der x_i -Achse

Gleichung (7.3) stellt im mathematischen Sinne eine 'natürliche' Randbedingung dar, da die 'Konormalenableitung bezüglich D_2 ', wie man $\frac{\partial p_2}{\partial v_{D_2}}$ bezeichnet, bei der Anwendung des Gauss'schen Satzes auf Gleichung (5.3) auftritt.

Am Kapillareingang wird man im Allgemeinen eine Sauerstoffdruckverteilung vorschreiben (Dirichletbedingung), da man den arteriellen Sauerstoffpartialdruck als physiologischen Parameter in der Hand hat und über ihn in der Lage ist, die Versorgungssituation in der ME zu beeinflussen. Ebenso kann man am venösen Ende eine Sauerstoffdruckverteilung vorschreiben. Daraus resultieren die Randbedingungen :

$$(7.4) \quad p_1 = p_a \quad (\text{Kapillareingang})$$

$$(7.5) \quad p_1 = p_v \quad (\text{Kapillarausgang})$$

p_a und p_v stellen Funktionen dar, die auf dem Kapillareingang bzw. -ausgang definiert und den arteriellen bzw. venösen Sauerstoffpartialdruck repräsentieren.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, am Kapillarein- bzw. Kapillarausgang ähnliche Bedingungen wie (7.3) vorzuschreiben. Bei der Simulation einer Ischämie, d.h. einer Situation, in der die Blutzufuhr eines Organs unterbrochen ist, interessiert man sich zum Beispiel dafür, wie und wo sich im Gewebe Zonen mit wenig oder keinem Sauerstoff ausbilden. Da der Blutstrom unterbrochen ist, gelangt nur durch Diffusion Sauerstoff in die RE. Es war weiter vorausgesetzt worden, daß auf der äußeren Grenzfläche des Versorgungsbereichs der Diffusionsfluss in Richtung der inneren Normalen verschwindet. Es liegt nahe, eine solche Bedingung auch auf dem Kapillarein- bzw. Kapillarausgang vorzuschreiben. Dabei muß man natürlich die Hämoglobindiffusion berücksichtigen, durch die ebenfalls Sauerstoff transportiert wird.

$$(7.6) \quad a_1 \cdot \frac{\partial p_1}{\partial v_{D_1}} + \frac{\partial (bS(p_1))}{\partial v_{D_3}} = (a_1 D_1 \nabla p_1 + D_3 \nabla (bS(p_1))) \cdot n_{H_1} \\ \equiv 0$$

In der vorliegenden Arbeit wird am Kapillareingang Gleichung (7.4) und am Kapillarausgang Gleichung (7.6) vorgeschrieben. Die im zweiten Teil der Arbeit benutzten mathematischen Methoden lassen sich ohne Schwierigkeiten auf die anderen möglichen Fälle übertragen, allerdings muß eine der beiden Gleichungen (7.4), (7.5) benutzt werden. Es bleibt anzumerken, daß (7.6) ebenfalls eine Randbedingung im schon erwähnten 'natürlichen' Sinne ist.

Auf der Kapillarwand erhält man ebenfalls Randbedingungen (Transmissionsbedingungen), wenn man berücksichtigt, daß sich der Sauerstoffpartialdruck beim Übergang von einem Kompartiment ins andere stetig ändert und daß die Sauerstoff-Flüsse links und rechts der Kapillarwand übereinstimmen sollen. Daraus folgt :

$$(7.7) \quad p_1 = p_2$$

$$(7.8) \quad a_1 \cdot \frac{\partial p_1}{\partial v_{D_1}} + a_2 \cdot \frac{\partial p_2}{\partial v_{D_2}} = 0$$

Zu beachten ist in Gleichung (7.8), daß einmal die innere Normale bezüglich des Kapillarkompartiments, das andere Mal die innere Normale bezüglich des Gewebekompartiments benutzt wird. Daraus erklärt sich das '+' - Zeichen in (7.8).

Die Gleichungen (7.7) und (7.8) fußen auf der Annahme, daß die Kapillarwand selbst dem Sauerstofftransport durch sie hindurch keinen Widerstand entgegensetzt. Andere Modellvorstellungen berücksichtigen, daß die Kapillarwand den Stofftransfer beschränkt, d.h. daß der Austausch permeabilitätslimitiert ist. Dies würde in der folgenden Gleichung zum Ausdruck kommen, die von manchen Autoren benutzt wird (/5/,/16/,/17/,/18/,/19/,/22/,/39/) :

$$(7.9) \quad a_1 \frac{\partial p_1}{\partial v_{D_1}} = P \cdot (p_1 - p_2) = - a_2 \frac{\partial p_2}{\partial v_{D_2}}$$

P : Permeabilität
(ml_{O₂} / cm² / sek / Torr)

Gleichung (7.7) stellt einen Spezialfall von Gleichung (7.9) für eine unendlich hohe Permeabilität P dar. In der vorliegenden Arbeit wird Gleichung (7.7) betrachtet. Andernfalls wäre es nötig, die im zweiten Teil der Arbeit definierten Funktionenräume zu modifizieren. Dabei gingen jedoch gewisse äquivalente Normierungseigenschaften verloren, sodaß nicht unmittelbar klar ist, ob die benutzten mathematischen Methoden ebenfalls angewandt werden können.

8. Das stationäre Modell

Das stationäre Modell kann aus dem zeitabhängigen Modell beim Übergang zu langen Zeiten entstehen. Es stellt gewissermaßen einen 'eingeschwungenen Zustand' oder ein 'Fließgleichgewicht' dar. Gekennzeichnet ist das stationäre Modell durch das Verschwinden aller zeitlichen Gradienten. Die zugehörigen Transportgleichungen lauten :

$$(8.1) \quad 0 \equiv \operatorname{div} (a_1 D_1 \nabla p_1 + D_3 \nabla (bS(p_1)) - \bar{V}(a_1 p_1 + bS(p_1)))$$

$$(8.2) \quad 0 \equiv \operatorname{div} (a_2 D_2 \nabla p_2) - F(p_2)$$

Alle Rand- und Transmissionsbedingungen bleiben im in Abschnitt 7 besprochenen Sinne bestehen mit dem Unterschied, daß die Zeitabhängigkeit entfällt. Ebenso werden alle Koeffizienten als nicht zeitabhängig vorausgesetzt. Die Anfangsbedingung entfällt. Für $\bar{b}$ bzw. b gilt anstelle von (4.9) bzw. (4.10) :

$$(8.3) \quad 0 \equiv \operatorname{div} (D_3 \nabla b - \bar{V} \cdot b)$$

Alle in den vorangegangenen Abschnitten bezüglich der Struktur der Mikrozirkulatorischen Einheit gemachten Bemerkungen bleiben bis auf Zeitabhängigkeit bestehen.

9. Einige weitere Voraussetzungen

Hinsichtlich der in den Transportgleichungen und den Randbedingungen auftretenden Koeffizienten und der 'Glattheit' der Flächen, die die Mikrozirkulatorische Einheit begrenzen, sollen noch einige weitere Bedingungen formuliert werden.

Am Kapillaranfang soll Blut in die Kapillare hineinfließen, d.h. in jedem Punkt der Fläche, die den Kapillaranfang darstellt, soll der Geschwindigkeitsvektor in die Kapillare hineinzeigen bzw. mit der inneren Normalen einen Winkel kleiner als 90° bilden. Am Kapillarausgang soll Blut aus der Kapillare ausfließen, d.h. der Geschwindigkeitsvektor soll in jedem Punkt der Fläche, die den Kapillarausgang darstellt, aus der Kapillare hinauszeigen bzw. mit der inneren Normalen einen Winkel zwischen 90° und 180° bilden. In unmittelbarer Nähe der Kapillarwand soll das Geschwindigkeitsfeld tangential zur Kapillarwand gerichtet sein, d.h. der Geschwindigkeitsvektor bildet in jedem Punkt der Kapillarwand mit der inneren Normalen einen rechten Winkel. Aus diesen Überlegungen resultieren die folgenden (Un)gleichungen :

$$(9.1) \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_1 \geq 0 \quad (\text{Kapillareingang})$$

$$(9.2) \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_1 \leq 0 \quad (\text{Kapillarausgang})$$

$$(9.3) \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (\text{Kapillarwand})$$

Sieht man die Hämoglobin-Plasma-Lösung in der Kapillare als inkompressible Flüssigkeit an, so erhält man die folgende Bedingung für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ (/7/) :

$$(9.4) \quad \text{div } \vec{v} \equiv 0$$

Die Hämoglobinkonzentration auf der Kapillarwand möge vernachlässigbar sein, und Hämoglobin soll die Kapillare nicht verlassen können. Daraus resultieren die folgenden Gleichungen, die für $\vec{b}$ und damit für b gelten :

$$(9.5) \quad (D_3 \cdot \nabla b) \cdot \vec{n}_1 \equiv 0 \quad (\text{Kapillarwand})$$

$$(9.6) \quad b \equiv 0 \quad (\text{Kapillarwand})$$

10. Zusammenfassung der physiologischen Voraussetzungen und Literaturüberblick

Die wichtigsten Voraussetzungen bezüglich der Struktur der Mikro-zirkulatorischen Einheit, der Transportmechanismen und der Randbedingungen sollen hier noch einmal zusammengefasst dargestellt werden.

- a) Die Mikro-zirkulatorische Einheit besteht aus zwei Kompartimenten, Kapillare und Gewebe. Durch eine gemeinsame Grenzfläche findet Sauerstoffaustausch zwischen den Kompartimenten statt.
- b) In der Kapillare fließt Blut in Form einer Hämoglobin-Plasma-Lösung. Das Hämoglobin liegt in tetramerer Form vor und bindet Sauerstoff reversibel. Dieser Mechanismus wird durch die Sauerstoffbindungskurve des Hämoglobins repräsentiert. Sauerstoff und Hämoglobin werden durch Diffusion und Konvektion transportiert. Der Sauerstoffeigenverbrauch soll vernachlässigt werden, ebenso soll kein Hämoglobin abgebaut bzw. neugebildet werden.
- c) Im Gewebe kommt Sauerstoff nur in gelöster Form vor. Die Anwesenheit von Hämoglobin wird vernachlässigt. Transport erfolgt nur durch Diffusion, nicht durch Konvektion. Sauerstoff wird gemäß einer Atmungsfunktion verbraucht.
- d) Auf dem äußeren Rand des Versorgungsbereichs wird der Sauerstoff-Fluss senkrecht zu dieser Fläche Null.
- e) Am Kapillareingang wird ein arterieller Sauerstoffpartialdruck angenommen. Das Geschwindigkeitsfeld der Hämoglobin-Plasma-Lösung ist in die Kapillare hineingerichtet.
- f) Am Kapillarausgang verschwindet der Sauerstoff-Fluss senkrecht zu dieser Fläche, der durch die Diffusion von Sauerstoff und Hämoglobin erzeugt wird.
- g) An der Austauschfläche ändern sich der Sauerstoffpartialdruck und der Sauerstoff-Fluss stetig beim Übergang von einem Kompartiment zum anderen.
Das Geschwindigkeitsfeld ist an der Kapillarwand tangential gerichtet.
Die Hämoglobinkonzentration in der Kapillarwand wird vernachlässigt. Hämoglobin kann die Blutbahn nicht verlassen.
- h) Im zeitabhängigen Fall werden als Anfangsverteilungen Lösungen des stationären Modells angenommen.
- i) Die totale Hämoglobinkonzentration genügt ebenfalls einer Transportgleichung (4.9), (8.3).

Die grundlegende morphologisch-physiologische Annahme auch des hier betrachteten Modells geht vom Krogh'schen Zylinder aus (/35/). Die weiter oben angestellten Überlegungen zum Versorgungsbereich versuchten zu zeigen, daß diese Modellvorstellung für viele Versorgungssituationen hinreichend ist. Ausnahmen bilden lediglich Situationen, die dadurch gekennzeichnet sind, daß Sauerstoff durch Diffusion von einer Kapillare in eine benachbarte durch das Gewebe abfließt. Die Krogh'sche Modellstruktur wurde von vielen Autoren zur Grundlage ihrer Modellrechnungen gemacht. Einen umfassenden Überblick über die in der Literatur vorhandenen Modellvorstellungen zu den Austauschvorgängen im Bereich der Kapillaren geben die Arbeiten von LEONARD und JØRGENSEN (/39/), FLETCHER (/18/) und LÜDDERS (/47/). Die ersten Modellrechnungen, die die Krogh'sche Struktur zur Grundlage hatten, wurden durchgeführt von ROUGHTON (/60/), THOMAS (/68/, /69/, /70/) und BLUM (/5/). Aufgrund stark vereinfachter Strukturen war es diesen Autoren möglich, geschlossene Lösungen für ihre Probleme anzugeben. Die für diese Fälle anwendbaren Methoden hat CRANK (/10/) zusammengefaßt. Mit der Entwicklung der Computer wurde es möglich, mit Hilfe von Methoden der Numerischen Mathematik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie Differenzenverfahren oder Monte-Carlo-Techniken, wesentlich kompliziertere Probleme zu bearbeiten. Dabei wurden vor allem die beschreibenden Differentialgleichungen verallgemeinert, d.h. es konnten Nichtlinearitäten berücksichtigt werden. In dieser Richtung orientiert sind beispielsweise die Arbeiten von BRULEY et al. (/6/), FLETCHER (/16/, /17/, /18/), GONZALEZ und ATTA (/22/), HALBERG et al. (/26/), HUNT et al. (/30/), McCracken et al. (/48/) und RENEAU et al. (/57/, /58/, /59/). Andere räumliche Strukturen, die die Interaktion zwischen Kapillaren berücksichtigen, verarbeiten in ihren Modellen die Autoren DIENER (/11/, /12/), GRUNEWALD (/23/, /24/, /25/), LEVITT (/40/) und METZGER (/49/, /50/).

In der vorliegenden Arbeit werden die Modellvorstellungen von BRULEY, HALBERG, HUNT, McCracken, RENEAU und DIENER verallgemeinert. Die mathematischen Ergebnisse dieser Arbeit stellen einen Ansatz zur Absicherung der Modellrechnungen der genannten Autoren dar.

MATHEMATISCHER

TEIL

11. Die klassischen Probleme

In diesem Abschnitt werden die im ersten Teil für drei Raumdimensionen abgeleiteten Gleichungen auf n Raumdimensionen ($n \in \mathbb{N}$) verallgemeinert. Die jeweiligen mathematischen Probleme werden in klassischer Form angegeben. Vorher werden einige Bezeichnungsweisen eingeführt. Am Ende des Abschnitts werden die Eigenschaften der Koeffizienten und Funktionen angegeben.

G_1, G_2 seien nichtleere, disjunkte, offene, zusammenhängende und beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. $\partial G_i, i=1,2$, seien $(n-1)$ -dimensionale, stückweise glatte, stetige Mannigfaltigkeiten, die zusätzlich die innere und äußere Kegeleigenschaft besitzen. Es gelte:

$$\begin{aligned} \bar{S}_0 &:= G_1 \cap G_2 & ; S_0 &\neq \emptyset \\ S_i &:= \partial G_i - \bar{S}_0 & ; S_i &\neq \emptyset, i=1,2 \\ S_1 &= S_{11} \cup S_{12} ; S_{11} \cap S_{12} = \emptyset ; G_{1i} &\neq \emptyset, i=1,2 \end{aligned}$$

$S_i, i=1,2,0, S_{1i}, i=1,2$, seien offen in der von G_i auf ∂G_i ($i=1,2$) induzierten Topologie.

Sei weiterhin $T \in \mathbb{R}_+$. Es mögen die folgenden Bezeichnungsweisen gelten:

$$\begin{aligned} Q_i &:= G_i \times (0;T) ; i=1,2 \\ \Gamma_i &:= S_i \times (0;T) ; i=0,1,2 \\ \Gamma_{1i} &:= S_{1i} \times (0;T) ; i=1,2 \end{aligned}$$

Unter dem KLASSISCHEN PSEUDOPARABOLISCHEN PROBLEM verstehe ich die folgende Aufgabenstellung:

Gesucht sind zwei Funktionen $u_i \in C^{2,1}(Q_i; \mathbb{R}) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_i; \mathbb{R})$ ($i=1,2$), die die folgenden Differentialgleichungen erfüllen:

$$(11.1) \quad L_i u_i \equiv \frac{\partial}{\partial t} (A_i u_i) + B_i u_i \equiv 0 \quad \text{auf } Q_i \quad (i=1,2)$$

Dabei gilt:

$$(11.2) \quad A_1 u_1 \equiv a_1 u_1 + bS(u_1) \quad \text{auf } Q_1$$

$$(11.3) \quad A_2 u_2 \equiv a_2 u_2 \quad \text{auf } Q_2$$

$$(11.4) \quad B_1 u_1 \equiv -\operatorname{div} (a_1 D_1 \nabla u_1 + D_3 \nabla (bS(u_1)) - \bar{V} \cdot A_1 u_1) \quad \text{auf } Q_1$$

$$(11.5) \quad B_2 u_2 \equiv -\operatorname{div} (a_2 D_2 \nabla u_2) + r(u_2) \quad \text{auf } Q_2$$

Zum Zeitpunkt $t=0$ sollen u_1 und u_2 die nachstehenden Anfangsbedingungen erfüllen :

$$(11.6) \quad u_1(x,0) = u_{10}(x,0) \quad \text{auf } \bar{G}_1$$

$$(11.7) \quad u_2(x,0) = u_{20}(x,0) \quad \text{auf } \bar{G}_2$$

Die Gleichungen (11.6) und (11.7) sind in dem Sinne zu verstehen, daß es Funktionen $u_{i0} \in C^{2,1}(\Omega_i; \mathbb{R}) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega}_i; \mathbb{R})$ ($i=1,2$) gibt, die mit u_i ($i=1,2$) übereinstimmen für $t=0$. (siehe (11.23)).

Auf Γ_{1i} ($i=1,2$) und auf Γ_2 seien durch u_1 und u_2 folgende Randbedingungen erfüllt :

$$(11.8) \quad u_1(x,t) = u_{10}(x,t) \quad \text{auf } \Gamma_{11}$$

$$(11.9) \quad a_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_{D_1}} + \frac{\partial (bS(u_1))}{\partial \nu_{D_3}} \equiv 0 \quad \text{auf } \Gamma_{12}$$

$$(11.10) \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu_{D_2}} \equiv 0 \quad \text{auf } \Gamma_2$$

Die Funktion u_{10} in Gleichung (11.8) wird ebenfalls durch die Bemerkung zu den Gleichungen (11.6) und (11.7), sowie (11.23) definiert. Transmissionsbedingungen der nachstehenden Art mögen die Funktionen u_1 und u_2 auf Γ_0 genügen :

$$(11.11) \quad u_1 \equiv u_2 \quad \text{auf } \Gamma_0$$

$$(11.12) \quad a_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_{D_1}} + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_{D_2}} \equiv 0 \quad \text{auf } \Gamma_0$$

Die genaue Definition und die Eigenschaften der auftretenden Terme wird am Ende dieses Abschnittes angegeben. Zunächst wird das stationäre Problem definiert.

Unter dem KLASSISCHEN ELLIPTISCHEN PROBLEM verstehe ich die folgende Aufgabenstellung :

Gesucht sind zwei Funktionen $u_i \in C^2(G_i; \mathbb{R}) \cap C^1(\bar{G}_i; \mathbb{R})$ ($i=1,2$), die den folgenden Differentialgleichungen genügen :

$$(11.13) \quad \bar{L}_i u_i \equiv - \eta_i u_i \equiv 0 \quad \text{auf } G_i \quad (i=1,2)$$

Für die Definition von B_1 und B_2 gilt ebenfalls (11.4) und (11.5), wobei jedoch zu beachten ist, daß bei allen auftretenden Termen die Zeitabhängigkeit entfällt.

u_1 und u_2 mögen auf S_{11} , S_{12} , S_2 die Randbedingungen (11.8), (11.9) und (11.10) erfüllen. Zu beachten ist auch hier, daß jede Zeitabhängigkeit entfällt. Gleichung (11.8) ist in dem Sinne zu verstehen, daß Funktionen $u_{10} \in C^2(G_1; \mathbb{R}) \cap C^1(\bar{G}_1; \mathbb{R})$ existieren, derart daß u_1 mit u_{10} auf S_{11} übereinstimmt (siehe (11.23)).

Auf S_0 mögen u_1 und u_2 den Transmissionsbedingungen (11.11) und (11.12) genügen, wobei auch hier die Zeitabhängigkeit entfällt.

An dieser Stelle werden die Koeffizienten der Differentialausdrücke und die auftretenden Funktionen mit ihren Eigenschaften definiert.

(11.14) ∇ : Gradient bezüglich der Variablen $x_1, \dots, x_n$

(11.15) div : Divergenz bezüglich $x_1, \dots, x_n$

(11.16) ' $\circ$ ' : Multiplikation einer $n \times n$ -Matrix mit einem n -dimensionalen Vektor bzw. zweier solcher Vektoren

(11.17) $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$

(11.18) D_i ($i=1,2,3$) seien symmetrische $n \times n$ -Matrizen mit Elementen d_{lik} ($i=1,2,3$; $l,k=1,\dots,n$), für die gilt :

$$\begin{aligned} d_{1ik}, d_{3ik} &\in \begin{cases} C^{1,0}(G_1; \mathbb{R}) \cap C^{0,0}(\bar{G}_1; \mathbb{R}) & (\text{pseudoparabolisch}) \\ C^1(G_1; \mathbb{R}) \cap C^0(\bar{G}_1; \mathbb{R}) & (\text{elliptisch}) \end{cases} \\ d_{2ik} &\in \begin{cases} C^{1,0}(G_2; \mathbb{R}) \cap C^{0,0}(\bar{G}_1; \mathbb{R}) & (\text{pseudoparabolisch}) \\ C^1(G_2; \mathbb{R}) \cap C^0(\bar{G}_2; \mathbb{R}) & (\text{elliptisch}) \end{cases} \end{aligned}$$

$d_{1ik}, d_{2ik}, d_{3ik}$ erfüllen mit ihren Ableitungen erster Ordnung Hölderbedingungen.

Die Matrizen D_i ($i=1,2,3$) erfüllen die folgende Elliptizitätsbedingung :

$$(++) \quad \sum_{i,k=1}^n d_{lik} z_i z_k \geq \lambda_1 \cdot |z|^2 ; \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}_+ \quad (l=1,2,3)$$

Die Ungleichung (++) gelte für alle $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und für alle $(x,t) \in \Omega_1, \Omega_2$ bzw. für alle $x \in G_1, G_2$.

$$(11.19) \quad \bar{V} \in \begin{cases} C^{1,0}(\Omega_1; \mathbb{R}^n) \cap C^{0,0}(\bar{\Omega}_1; \mathbb{R}^n) & \text{(pseudoparabolisch)} \\ C^1(G_1; \mathbb{R}^n) \cap C^0(\bar{G}_1; \mathbb{R}^n) & \text{(elliptisch)} \end{cases}$$

Die Komponenten von $\bar{V}$ erfüllen mit ihren Ableitungen erster Ordnung Hölderbedingungen.

Weiterhin bezeichne ich mit $\bar{V}_+$ den folgenden Term

$$\bar{V}_+ := \bar{V} \circ N_1 = \sum_{i=1}^n \bar{V}_i \cdot \cos(N_1; x_i)$$

$\bar{V}_+$ ist auf ∂G_1 bzw. $\partial G_1 \times (0;T)$ definiert. N_1 bezeichnet die innere Normale bezüglich G_1 . Es gilt :

$$\bar{V}_+ \in \begin{cases} C^{1,0}(\partial G_1 \times (0;T); \mathbb{R}) & \text{(pseudoparabolisch)} \\ C^1(\partial G_1; \mathbb{R}) & \text{(elliptisch)} \end{cases}$$

$\bar{V}$ und $\bar{V}_+$ mögen die folgenden Bedingungen erfüllen :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{V} &= 0 && \text{auf } \Omega_1 \text{ bzw. } G_1 \\ \bar{V} &= 0 && \text{in einer hinreichend kleinen} \\ &&& \text{Umgebung von } \Gamma_0 \text{ bzw. } S_0 \\ \bar{V}_+ &\geq 0 && \text{auf } \Gamma_{11} \text{ bzw. } S_{11} \\ \bar{V}_+ &\leq 0 && \text{auf } \Gamma_{12} \text{ bzw. } S_{12} \end{aligned}$$

$$(11.20) \quad b \in C^2(G_1; \mathbb{R}) \cap C^1(\bar{G}_1; \mathbb{R})$$

b sei Lösung der Differentialgleichung

$$\operatorname{div} (D_3 \nabla b - \bar{V} b) = 0 \quad \text{auf } G_1$$

und erfülle mit seinen Ableitungen bis zur ersten Ordnung Hölderbedingungen. Weiterhin gelte

$$\begin{aligned} b &\geq 0 && \text{auf } \bar{G}_1 \\ b &= 0 && \text{in einer hinreichend kleinen} \\ &&& \text{Umgebung von } S_0 \end{aligned}$$

$$(11.21) \quad S \in C^2(\mathbb{R}; [0;1])$$

S sei monoton steigend, es gelte :

$$S(r) = 0, \text{ falls } r \leq 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S(r) = 1$$

S, S', S'' seien Hölderstetig auf allen kompakten Teilmengen.

Damit folgt :

$$0 \leq S(r) \leq C_1 \cdot |r|, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq S'(r) \leq C_2, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

$$(11.22) \quad F \in C^1(\mathbb{R}; [0;F_0])$$

F sei monoton steigend, es gelte :

$$F(r) = 0, \text{ falls } r \leq 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = F_0$$

Aus diesen Eigenschaften folgt :

$$0 \leq F(r) \leq C_3 \cdot |r|, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq F'(r) \leq C_4, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

Die Eigenschaften der weiter oben eingeführten Funktion u_{i0} ($i=1,2$) seien hier noch einmal genannt :

$$(11.23) \quad u_{i0} \in \begin{cases} C^{2,1}(\Omega_i; \mathbb{R}) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega}_i; \mathbb{R}) & (\text{pseudoparabolisch}) \\ C^2(G_i; \mathbb{R}) \wedge C^1(\bar{G}_i; \mathbb{R}) & (\text{elliptisch}) \end{cases}$$

$i=1,2$

u_{i0} erfülle auf S_{11} eine Hölderbedingung und es gelte :

$$u_{10} = u_{20} \quad \text{auf } \Gamma_0 \text{ bzw. } S_0$$

12. Die verallgemeinerten Probleme

Auf Schwierigkeiten stößt der Versuch, die Existenz einer Lösung für die in Abschnitt 11 genannten klassischen Probleme direkt nachzuweisen. Man ist deshalb gezwungen, einen Umweg zu gehen. Ein übliches Vorgehen ist, das klassische Problem im Sinne der L_2 -Theorie schwach zu formulieren und dann mit dem Gauss'schen Satz unter Berücksichtigung der Randbedingungen, der Anfangsbedingungen und der Transmissionsbedingungen in ein 'verallgemeinertes' Problem zu transformieren. 'Verallgemeinert' ist dabei in dem Sinne zu verstehen, daß jede Lösung des klassischen Problems auch Lösung des 'verallgemeinerten' Problems ist. Kann man eine Existenz einer 'verallgemeinerten' Lösung nachweisen, so versucht man den eben beschriebenen Weg in anderer Richtung zu gehen und die 'verallgemeinerte' Lösung als klassisch nachzuweisen. Das Hilfsmittel für den letzten Schritt stellt die Regularitätstheorie dar.

In diesem Abschnitt sollen nun die 'verallgemeinerten' Probleme definiert werden. Dazu sind zunächst einige funktionalanalytische Voraussetzungen nötig. Insbesondere müssen geeignete Funktionenräume mit den dazugehörigen Topologien definiert werden.

Die Sobolev-Räume $H^m(G_1)$ ($i=1,2; m \in \mathbb{N}$) seien zusammen mit ihren Normen im Sinne von LIONS und MAGENES (/43/) definiert. Dann sind die folgenden Definitionen von Hilberträumen sinnvoll :

$$(12.1) \quad H := H^0(G_1) \times H^0(G_2) = L_2(G_1) \times L_2(G_2)$$

$$\|v\|_H := \left(\|v_1\|_{L_2(G_1)}^2 + \|v_2\|_{L_2(G_2)}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall v \in H$$

$$(12.2) \quad V := H^1(G_1) \times H^1(G_2)$$

$$\|v\|_V := \left(\|v_1\|_{H^1(G_1)}^2 + \|v_2\|_{H^1(G_2)}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall v \in V$$

Da ∂G_1 und ∂G_2 als stückweise differenzierbar vorausgesetzt wurden, sind auf $H^1(G_1)$ und $H^1(G_2)$ Spuoperatoren nach $L_2(\partial G_1)$ und $L_2(\partial G_2)$ definiert (/2/, /75/). Die Spuoperatoren sind insbesondere linear

und stetig. Die folgende Definition ist also sinnvoll :

$$(12.3) \quad \mathcal{W} := \left\{ v \mid v \in V, v_1 \equiv 0 \text{ auf } S_{11}, v_1 \equiv v_2 \text{ auf } S_0 \right\}$$

$$\|v\|_{\mathcal{W}} := \|v\|_V, \quad \forall v \in \mathcal{W}$$

$\mathcal{W}$ ist als abgeschlossener Unterraum von V ebenfalls ein Hilbertraum.

Die folgenden linearen und stetigen Einbettungen sind gültig :

$$(12.4) \quad V \subset H \subset V'$$

$$(12.5) \quad \mathcal{W} \subset H \subset \mathcal{W}'$$

Die linken Einbettungen in (12.4) und (12.5) sind dicht, alle Einbettungen sind kompakt. Mit V' , $\mathcal{W}'$ seien die Dualräume von V , $\mathcal{W}$ gemeint. H wurde mit seinem Dualraum H' identifiziert.

Auf $\mathcal{W}(V)$ läßt sich die folgende Seminorm definieren :

$$(12.6) \quad [v]_{\mathcal{W}(V)} := \left(\sum_{i=1}^2 \int_{G_1} \|\nabla v_i\|_{\mathbb{R}^n}^2 dx \right)^{1/2}; \quad \forall v \in \mathcal{W}(V)$$

Durch (12.6) wird auf $\mathcal{W}$ nicht nur eine Seminorm, sondern eine Norm definiert, die zur Norm von $\mathcal{W}$ in (12.3) äquivalent ist. Es gelten die Ungleichungen :

$$(12.7) \quad [v]_{\mathcal{W}} \leq \|v\|_{\mathcal{W}} \leq K \cdot [v]_{\mathcal{W}}; \quad \forall v \in \mathcal{W}$$

Die linke Ungleichung in (12.7) folgt aus der Definition von $[\cdot]_{\mathcal{W}}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$. Die rechte Ungleichung kann man mit der Friedrich'schen Ungleichung (/20/), wenn man berücksichtigt, daß S_0 und S_{11} positives Oberflächenmaß besitzen, der Definition von $\mathcal{W}$ und der Stetigkeit und Linearität der Spurooperatoren nachweisen.

Mit (11.23) folgt, daß $u_0 = (u_{10}, u_{20}) \in V$ gilt. Ist $v \in \mathcal{W}$ vorgegeben, so erfüllt $v + u_0$ die Randbedingung (11.8) im Sinne des Randraumes $L_2(\partial G_1)$. Im gleichen Sinne ist die Transmissionsbedingung (11.11) erfüllt.

Mit dem Gauss'schen Satz und unter Berücksichtigung der Rand- und Transmissionsbedingungen und der Definition von W , erhält man das folgende VERALLGEMEINERTE ELLIPTISCHE PROBLEM :

Gesucht ist ein $\bar{u} \in W$ mit der Eigenschaft

$$(12.8) \quad \bar{I}(\bar{u} / w) = 0, \quad \forall w \in W$$

Dabei gilt :

$$(12.9) \quad \bar{I}(v / w) = \int_{G_1} (a_1 D_1 \circ \nabla(v_1 + u_{10}) + D_3 \circ \nabla(bS(v_1 + u_{10}))) \\ - \bar{v} \cdot A_1(v_1 + u_{10}) \circ \nabla w_1 \, dx \\ + \int_{G_2} (a_2 D_2 \circ \nabla(v_2 + u_{20})) \circ \nabla w_2 + r(v_2 + u_{20}) \cdot w_2 \, dx \\ - \int_{S_{12}} \bar{v}_+ \cdot A_1(v_1 + u_{10}) \cdot w_1 \, ds, \quad \forall v, w \in W$$

Wie man mit den in Abschnitt 11 aufgelisteten Eigenschaften der Koeffizienten der Differentialgleichungen überlegt, ist der Term $\bar{I}(v/w)$ für alle $v, w \in W$ wohldefiniert.

Existiert ein $\bar{u} \in W$, das (12.8) erfüllt, so heißt

$$(12.10) \quad u := \bar{u} + u_0 \in V$$

VERALLGEMEINERTE LÖSUNG des elliptischen Problems.

Im pseudoparabolischen Fall hat man die Abhängigkeit von t zu berücksichtigen. Dies geschieht durch die folgenden Definitionen, die sich ebenfalls an LIONS und MAGENES (/43/, /44/) und ZEIDLER (/75/) orientieren :

$$(12.11) \quad Z := L_2(0, T; H) = L_2(Q_1) \times L_2(Q_2)$$

$$\|v\|_Z := \left(\|v_1\|_{L_2(Q_1)}^2 + \|v_2\|_{L_2(Q_2)}^2 \right)^{1/2} \\ = \left(\int_0^T \|v(t)\|_H^2 \, dt \right)^{1/2}, \quad \forall v \in Z$$

$$(12.12) \quad V := L_2(0, T; V)$$

$$\|v\|_Y := \left(\int_0^T \|v(t)\|_V^2 dt \right)^{1/2}, \quad Vv \in Y$$

(12.13) $Y_0 := L_2(0, T; W)$

$$\|v\|_{Y_0} := \left(\int_0^T \|v(t)\|_W^2 dt \right)^{1/2}, \quad Vv \in Y_0$$

(12.14) $X := \left\{ v \mid v \in Y_0, \frac{\partial v}{\partial t} \in Z, v(0) = v(T) = 0 \right\}$

$$\|v\|_X := \left(\|v\|_{Y_0}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_Z^2 \right)^{1/2}, \quad Vv \in X$$

Zur Definition von X ist zu sagen, daß die partielle Ableitung nicht im distributionentheoretischen Sinne zu verstehen ist. Aus den Bedingungen $v \in Y_0$ und $\frac{\partial v}{\partial t} \in Z$ folgt (/43/, /75/), daß $v \in C([0, T]; H)$ gilt. In diesem Sinne sind die Bedingungen $v(0)=v(T)=0$ zu verstehen. Die folgenden linearen und stetigen Einbettungen sind gültig :

(12.15) $X \subset Y \subset X'$

(12.16) $Y_0 \subset Z \subset Y_0' \quad (= L_2(0, T; W'))$

(12.17) $Y \subset Z \subset Y' \quad (= L_2(0, T; V'))$

Die linken Einbettungen in (12.15) - (12.17) sind dicht, die Einbettungen in (12.15) sind kompakt, wie man mit dem lemma von Aubin nachweist (/41/, Chapitre 1, Théorème 5.1).

Auf X , Y_0 und Y kann man in analoger Weise wie in (12.6) die folgende Seminorm definieren :

(12.18) $[v]_{Y_0(Y)} := \left(\int_0^T [v(t)]_{W(Y)}^2 dt \right)^{1/2}, \quad Vv \in Y_0(Y)$

(12.19) $[v]_X := \left([v]_{Y_0}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_Z^2 \right)^{1/2}, \quad Vv \in X$

Auf Y_0 und X sind $[\cdot]_{Y_0}$ und $[\cdot]_X$ nicht nur als Seminormen, sondern als Normen anzusehen, die zu $\|\cdot\|_{Y_0}$ und $\|\cdot\|_X$ äquivalent sind. Es gelten die Ungleichungen :

(12.20) $[v]_{Y_0} \leq \|v\|_{Y_0} \leq K \cdot [v]_{Y_0}, \quad Vv \in Y_0$

(12.21) $[v]_X \leq \|v\|_X \leq K \cdot [v]_X, \quad Vv \in X$

Die Ungleichungen (12.20) und (12.21) folgen aus (12.7) und den jeweiligen Definitionen.

Aus (11.23) folgt, daß $u_0 \in H^{2,1}(\Omega_1) \times H^{2,1}(\Omega_2)$ gilt (/44/) und daß für u_0 die Spur auf dem Rande von Ω_1 und Ω_2 definiert ist. Ist nun $v \in X$ vorgegeben, so gilt $v + u_0 \in Y$, $\frac{\partial}{\partial t}(v + u_0) \in Z$. Weiterhin erfüllt $v + u_0$ die Randbedingung (11.8), die Transmissionsbedingung (11.11) und die Anfangsbedingungen (11.6) und (11.7) im Sinne von $L_2(\partial\Omega_1)$ und $L_2(\partial\Omega_2)$.

Mit dem Gauss'schen Satz, den Anfangs-, Rand- und Transmissionsbedingungen und der Definition von X , sowie partieller Integration nach t erhält man das folgende VERALLGEMEINERTE PSEUDOPARABOLISCHE PROBLEM :

Gesucht ist ein $\bar{u} \in Y_0$ mit der Eigenschaft

$$(12.22) \quad 1(\bar{u} / w) = 0, \quad \forall w \in X$$

Dabei gilt :

$$(12.23) \quad 1(v/w) = \int_{\Omega_1} (a_1 D_1 \nabla(v_1 + u_{10}) + D_3 \nabla(bS(v_1 + u_{10}))) \\ - \bar{v} \cdot \Lambda_1(v_1 + u_{10}) \nabla w_1 - \Lambda_1(v_1 + u_{10}) \frac{\partial w_1}{\partial t} dxdt \\ + \int_{\Omega_2} (a_2 D_2 \nabla(v_2 + u_{20}) \nabla w_2 + F(v_2 + u_{20}) \cdot w_2 \\ - \Lambda_2(v_2 + u_{20}) \frac{\partial w_2}{\partial t} dxdt \\ - \sum_{12} \bar{v}_+ \cdot \Lambda_1(v_1 + u_{10}) \cdot w_1 dsdt, \quad \forall v \in Y_0, \forall w \in X$$

Auch in diesem Fall prüft man nach, daß der Ausdruck (12.23) für alle $v \in Y_0$ und $w \in X$ wohldefiniert ist. Hat man eine Lösung $\bar{u} \in Y_0$ von (12.22) gefunden, so heißt

$$(12.24) \quad u := \bar{u} + u_0 \in Y$$

VERALLGEMEINERTE LÖSUNG des pseudoparabolischen Problems.

Eine derartige Lösung läßt sich jedoch nicht direkt erhalten, sondern man betrachtet zunächst ein Problem, das durch elliptische Regularisierung entsteht.

Unter dem REGULARISIERTEN VERALLGEMEINERTEN PSEUDOPARABOLISCHEN PROBLEM verstehe ich die folgende Aufgabenstellung :

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist ein $u_\varepsilon \in X$ gesucht mit der Eigenschaft

$$(12.25) \quad l_\varepsilon (u_\varepsilon / w) = 0, \quad \forall w \in X$$

Dabei gilt :

$$(12.26) \quad l_\varepsilon(v/w) := l(v/w)$$

$$\begin{aligned} & + \varepsilon \cdot \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial t} (A_1(v_1 + u_{10})) \frac{\partial w_1}{\partial t} dx dt \\ & + \varepsilon \cdot \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial t} (A_2(v_2 + u_{20})) \frac{\partial w_2}{\partial t} dx dt, \\ & \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall v, w \in X \end{aligned}$$

Man sieht, daß $l_\varepsilon(v/w)$ für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $v, w \in X$ wohldefiniert ist. Dem verallgemeinerten Problem (12.25) entspricht das folgende klassische Problem :

Gesucht sind Funktionen $u_i \in C^{2,2}(Q_i; \mathbb{R}) \cap C^{1,1}(\bar{Q}_i; \mathbb{R})$ ($i=1,2$) mit den Eigenschaften

$$(12.27) \quad -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (A_i u_i) + \frac{\partial}{\partial t} (A_i u_i) + B_i u_i = 0 \quad \text{auf } Q_i \quad (i=1,2)$$

$$(12.28) \quad \frac{\partial}{\partial t} (A_i u_i)(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} (A_i u_i)(x, T) = 0 \quad \text{auf } G_i \quad (i=1,2)$$

Weiterhin sollen die u_i ($i=1,2$) die übrigen Anfangs-, Rand- und Transmissionsbedingungen erfüllen.

13. Existenz verallgemeinerter Lösungen

In diesem Abschnitt werden zunächst die durch (12.9), (12.23) und (12.26) definierten Operatoren auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Speziell wird nach Eigenschaften gesucht, die die Theorie der pseudomonotonen Operatoren anwendbar macht (/41/). Im elliptischen Fall läßt sich so direkt die Existenz einer Lösung des verallgemeinerten Problems nachweisen. Im pseudo-parabolischen Fall wird zunächst eine Lösung des regularisierten verallgemeinerten Problems gesucht für alle positiven ϵ . Mit Methoden der elliptischen Regularisierung (/15/, /42/) wird dann die Existenz einer verallgemeinerten Lösung des pseudoparabolischen Problems nachgewiesen.

a) Der elliptische Fall

Bemerkung 13.1

Durch (12.9) wird ein Operator

$$(13.1) \quad \begin{aligned} \bar{L} &: W \longrightarrow W' \\ \bar{L}(v/w) &= \bar{I}(v/w) \end{aligned}$$

definiert. $\bar{L}$ ist pseudomonoton.

Beweis :

Den durch (12.9) definierten Term $\bar{I}(v/w)$ spaltet man zweckmäßigerweise auf in

$$(13.2) \quad \begin{aligned} \bar{m}(v/w) &= \int_{G_1} (a_1 D_1 \circ \nabla(v_1 + u_{10}) - \bar{v} a_1(v_1 + u_{10})) \circ \nabla w_1 \, dx \\ &+ \int_{G_2} (a_2 D_2 \circ \nabla(v_2 + u_{20})) \circ \nabla w_2 + F(v_2 + u_{20}) \cdot w_2 \, dx \\ &- \int_{S_{12}} \bar{v}_{+1}(v_1 + u_{10}) \cdot w_1 \, ds, \quad \forall v, w \in W \end{aligned}$$

$$(13.3) \quad \begin{aligned} \bar{p}(v/w) &= \int_{G_1} (D_3 \circ \nabla(bS(v_1 + u_{10})) - \bar{v} bS(v_1 + u_{10})) \circ \nabla w_1 \, dx \\ &= \int_{G_1} bS(v_1 + u_{10}) \cdot (D_3 \circ \nabla(v_1 + u_{10})) \circ \nabla w_1 \\ &\quad + S(v_1 + u_{10}) \cdot (D_3 \circ \nabla b - \bar{v} b) \circ \nabla w_1 \, dx, \quad \forall v, w \in W \end{aligned}$$

Mit den Eigenschaften der in (13.2) und (13.3) auftretenden Koeffizienten und Funktionen, der Hölder'schen Ungleichung und der Stetigkeit und Linearität der Spurooperatoren kann man die folgenden Ungleichungen nachweisen :

$$(13.4) \quad \left| \bar{m}(v/w) \right| \leq (K_1 \cdot \|v\|_{W'} + K_2) \cdot \|w\|_{W'} \quad , \forall v, w \in W$$

$$(13.5) \quad \left| \bar{p}(v/w) \right| \leq (K_1 \cdot \|v\|_{W'} + K_2) \cdot \|w\|_{W'} \quad , \forall v, w \in W$$

Durch (13.2) und (13.3) werden also beschränkte Operatoren $\bar{m}$ und $\bar{p}$ von W nach W' definiert. Da F und S monoton steigend sind, $\bar{v}_+ \in 0$ auf S_{12} gilt, $b \geq 0$ und die Elliptizitätsbedingung in (11.18) erfüllt ist, kann man unter anderem durch Anwendung des Gauss'schen Satzes nachweisen, daß die Abschätzung

$$(13.6) \quad (\bar{m}v - \bar{m}w)(v-w) \geq K \cdot [v-w]_{W'}^2 \quad , \forall v, w \in W$$

erfüllt ist. Mit (12.7) und (13.6) folgt, daß $\bar{m}$ ein streng monotoner Operator ist. Mit grundsätzlich den gleichen Mitteln wie für den Nachweis von (13.4) und (13.6) weist man die folgende Ungleichung nach :

$$(13.7) \quad \left| (\bar{m}v - \bar{m}\bar{v})(w) \right| \leq K \cdot \|v - \bar{v}\|_{W'} \cdot \|w\|_{W'} \quad , \forall v, \bar{v}, w \in W$$

(13.7) besagt also, daß $\bar{m}$ ein (Lipschitz-)stetiger Operator ist. Nun soll nachgewiesen werden, daß $\bar{p}$ pseudomonoton ist. Dazu wird gezeigt, daß $\bar{p}$ 'vom Typ der Variationsrechnung' ist (/41/). Dazu definiert man die folgenden Terme :

$$(13.8) \quad \bar{q}(v/\bar{v})(w) = \bar{q}_1(v, \bar{v}, w) + \bar{q}_2(v, w)$$

$$(13.9) \quad \bar{q}_1(v, \bar{v}, w) = \int_{G_1} b S(v_1 + u_{10}) \cdot (D_3 \circ \nabla(\bar{v}_1 + u_{10})) \circ \nabla w_1 \, dx$$

$$(13.10) \quad \bar{q}_2(v, w) = \int_{G_1} S(v_1 + u_{10}) \cdot (D_3 \circ \nabla b - \bar{v} b) \circ \nabla w_1 \, dx$$

$\forall v, \bar{v}, w \in W$

Durch $\bar{q}$ wird ein beschränkter Operator $\bar{q}$ von $W \times W$ nach W' definiert. Es gilt

$$(13.11) \quad \bar{p}v = \bar{q}(v/v) \quad , \forall v \in W$$

Die Abbildung

$$(13.12) \quad W \ni \bar{v} \longrightarrow \bar{q}(v/\bar{v}) \in W'$$

ist für alle $v \in W$ beschränkt. Weiter zeigt man, wie bei (13.6) und (13.7), daß diese Abbildung monoton und (Lipschitz-)stetig ist, denn es gilt:

$$\begin{aligned} (13.13) \quad & (\bar{q}(v/\bar{v}) - \bar{q}(v/\bar{0}))(\bar{v}-\bar{0}) = \bar{q}_1(v, \bar{v}, \bar{v}-\bar{0}) - \bar{q}_1(v, \bar{0}, \bar{v}-\bar{0}) \\ & = \int_{\Gamma_1} b S'(v_1 + u_{10}) \cdot (D_3 \nabla(\bar{v}_1 - \bar{0}_1)) \otimes \nabla(\bar{v}_1 - \bar{0}_1) \, dx \\ & \geq 0 \quad (\text{mit (11.18) und den Eigenschaften von } b \text{ und } S) \\ & \quad \forall v, \bar{v}, \bar{0} \in W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (13.14) \quad & |\bar{q}(v/\bar{v}) - \bar{q}(v/\bar{0})| = |\bar{q}_1(v, \bar{v}, w) - \bar{q}_1(v, \bar{0}, w)| \\ & \leq K \cdot \|\bar{v} - \bar{0}\|_W \cdot \|w\|_W, \quad \forall \bar{v}, \bar{0}, v, w \in W \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$(13.15) \quad W \ni v \longrightarrow \bar{q}(v/\bar{v}) \in W'$$

ist beschränkt für alle $\bar{v} \in W$. Da die Abbildung (13.15) semilinear in v ist, folgt mit 'Lemme 2.1' (/41/, Chapitre 2) und der kompakten Einbettung von W in H die verstärkte Stetigkeit von (13.15).

Die Eigenschaften '(2.33)' und '(2.34)' in /41/ (S.181) folgen sofort aus der Kompaktheit von Abbildung (13.15).

Damit ist $\bar{P}$ 'vom Typ des Variationskalküls'. Mit 'Proposition 2.6' (/41/, Chapitre 2) folgt, daß $\bar{P}$ pseudomonoton ist. Daraus ergibt 'Remarque 2.12' (/41/, Chapitre 2), daß

$$(13.16) \quad \bar{L} = \bar{A} + \bar{P}$$

als Summe aus einem pseudomonotonen und einem monotonen, stetigen und beschränkten Operator ebenfalls pseudomonoton ist. /

Bemerkung 13.2

$\bar{L}$ ist koerzitiv, d.h. es gilt

$$(13.17) \quad \frac{\bar{L}v(v)}{\|v\|_{\mathcal{W}}} \longrightarrow \infty, \text{ falls } \|v\|_{\mathcal{W}} \longrightarrow \infty$$

Beweis :

Mit der Hölder'schen Ungleichung, der Stetigkeit und Linearität der Spurooperatoren, mit (11.18) (Elliptizitätsbedingung), mit der Tatsache, daß $\bar{V}_+ \leq 0$ auf S_{12} , $\bar{V}_+ \geq 0$ auf S_{11} , $\bar{V}_+ = 0$ auf S_0 , $f(a)a \geq 0$ und $S(a)a \geq 0$ für alle $a \in R$ gilt, folgt unter anderem durch Anwendung des Gauss'schen Satzes, daß die Ungleichung

$$(13.18) \quad \bar{m}(v/v) \geq K_1 \cdot [v]_{\mathcal{W}}^2 - K_2 \cdot [v]_{\mathcal{W}} - K_3$$

für alle $v \in \mathcal{W}$ erfüllt ist.

Mit analogen Überlegungen erhält man

$$(13.19) \quad \bar{p}(v/v) \geq -K \cdot [v]_{\mathcal{W}}, \quad \forall v \in \mathcal{W}$$

Aus (13.18) und (13.19) folgt mit der Definition von $\bar{L}$:

$$(13.20) \quad \bar{L}v(v) \geq K_1 \cdot [v]_{\mathcal{W}}^2 - K_2 \cdot [v]_{\mathcal{W}} - K_3, \quad \forall v \in \mathcal{W}$$

Mit (12.7) und (13.20) folgt die Behauptung. /

Satz 13.1 (Existenz einer Lösung des verallgemeinerten elliptischen Problems)

Es existiert ein $\bar{u} \in \mathcal{W}$ mit der Eigenschaft

$$(13.21) \quad \bar{L}\bar{u} = 0$$

Beweis :

Da $\bar{L}$ ein pseudomonotoner, koerzitiver Operator von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{W}'$ ist, $\mathcal{W}$ als Hilbertraum ein reflexiver Banachraum und außerdem separabel ist, folgt mit 'Théorème 2.7' (/41/, Chapitre 2) die Existenz eines Elementes $\bar{u} \in \mathcal{W}$, das (13.21) erfüllt. /

Aus $\bar{L}\bar{u} = 0$ in $\mathcal{W}'$ folgt $0 = \bar{L}\bar{u}(w) = \bar{I}(\bar{u}/w)$ für alle $w \in \mathcal{W}$.
 $\bar{u}$ ist also Lösung im Sinne von (12.8).

b) Der pseudoparabolische Fall

Das Vorgehen ist zunächst ähnlich wie im elliptischen Fall. Mit völlig analogen Methoden zeigt man zunächst, daß eine Lösung des regularisierten verallgemeinerten pseudoparabolischen Problems existiert für alle $\varepsilon > 0$.

Bemerkung 13.3

Für alle $\varepsilon \geq 0$ wird durch (12.26) ein Operator

$$(13.22) \quad \begin{aligned} L_\varepsilon &: X \rightarrow X' \\ L_\varepsilon(v/w) &= l_\varepsilon(v/w) \end{aligned}$$

definiert. L_ε ist für alle $\varepsilon \geq 0$ pseudomonoton.

Beweis :

Wie im Beweis zu Bemerkung 13.1 spaltet man l_ε auf in :

$$(13.23) \quad \begin{aligned} m_\varepsilon(v/w) &= \int_{\Omega_1} (a_1 D_1 \nabla(v_1 + u_{10})) \nabla w_1 - \bar{v} \cdot a_1(v_1 + u_{10}) \nabla w_1 \\ &\quad - a_1(v_1 + u_{10}) \frac{\partial w_1}{\partial t} + \varepsilon \cdot a_1 \frac{\partial(v_1 + u_{10})}{\partial t} \frac{\partial w_1}{\partial t} dxdt \\ &\quad + \int_{\Omega_2} (a_2 D_2 \nabla(v_2 + u_{20})) \nabla w_2 + F(v_2 + u_{20}) \cdot w_2 \\ &\quad - a_2(v_2 + u_{20}) \frac{\partial w_2}{\partial t} + \varepsilon \cdot a_2 \frac{\partial(v_2 + u_{20})}{\partial t} \frac{\partial w_2}{\partial t} dxdt \\ &\quad - \int_{\Gamma_{12}} \bar{v} \cdot \Lambda_1(v_1 + u_{10}) \cdot w_1 dsdt, \quad \forall v, w \in X \end{aligned}$$

$$(13.24) \quad \begin{aligned} p_\varepsilon(v/w) &= \int_{\Omega_1} (D_3 \nabla(bS(v_1 + u_{10}))) \nabla w_1 - \bar{v} \cdot bS(v_1 + u_{10}) \nabla w_1 \\ &\quad - bS(v_1 + u_{10}) \frac{\partial w_1}{\partial t} + \varepsilon \cdot b \frac{\partial}{\partial t}(S(v_1 + u_{10})) \frac{\partial w_1}{\partial t} dxdt \\ &\quad \forall v, w \in X \end{aligned}$$

Mit dem gleichen Vorgehen wie im Beweis von Bemerkung 13.1 zeigt man, daß durch m_ε ein beschränkter, monotoner und stetiger Operator M_ε von X nach X' definiert wird. Ebenso zeigt man, daß durch p_ε ein Operator P_ε von X nach X' definiert wird, der vom Typ der Variations-

rechnung' und damit pseudomonoton ist. Der Operator $L_\epsilon = M_\epsilon + P_\epsilon$ ist dann ebenfalls pseudomonoton. /

Bemerkung 13.4

Der Operator L_ϵ ist für alle $\epsilon > 0$ koerzitiv, d.h. es gilt

$$(13.25) \quad \frac{L_\epsilon v(v)}{\|v\|_X} \longrightarrow \infty, \text{ falls } \|v\|_X \longrightarrow \infty$$

Beweis :

Mit gleichen Abschätzungen und Techniken wie im Beweis zu Bemerkung 13.2 und partieller Integration nach t gelangen die Abschätzungen :

$$(13.26) \quad m_\epsilon(v/v) \geq K_1' \cdot [v]_{Y_0}^2 - K_2' \|v\|_{Y_0} - K_3' + \epsilon \cdot (K_4' \|\frac{\partial v}{\partial t}\|_Z^2 - K_5' \|\frac{\partial v}{\partial t}\|_Z), \quad \forall v \in X$$

$$(13.27) \quad n_\epsilon(v/v) \geq -K_2'' \cdot [v]_{Y_0} - K_3'' - K_5' \|\frac{\partial v}{\partial t}\|_Z$$

$\forall v \in X$

Aus (13.26) und (13.27) folgt

$$(13.28) \quad L_\epsilon(v/v) \geq K_1' \cdot [v]_{Y_0}^2 - K_2' \|v\|_{Y_0} - K_3' + \epsilon \cdot (K_4' \|\frac{\partial v}{\partial t}\|_Z^2 - K_5' \|\frac{\partial v}{\partial t}\|_Z)$$

für alle $v \in W$. Mit (12.19) und (12.21) folgt dann aus (13.28) die Behauptung. /

Satz 13.2 (Existenz einer Lösung des regularisierten verallgemeinerten pseudoparabolischen Problems)

Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $u_\epsilon \in X$ mit der Eigenschaft

$$(13.29) \quad L_\epsilon u_\epsilon = 0$$

Beweis :

Da für alle $\epsilon > 0$ L_ϵ pseudomonoton und koerzitiv ist, folgt die Existenz wie in Satz 13.1. /

Nachdem mit Satz 13.2 für alle $\epsilon > 0$ die Existenz einer Lösung u_ϵ des regularisierten verallgemeinerten pseudoparabolischen Problems gesichert worden ist, soll nun eine Lösung $\bar{u}$ des verallgemeinerten pseudoparabolischen Problems als Häufungspunkt der (u_ϵ) in der Topologie von Y_0 gewonnen werden. Die Techniken lehnen sich stark an die von LIONS (/42/) und DUBINSKIJ (/15/) benutzten an. Zunächst möchte ich eine technische Bemerkung machen.

Bemerkung 13.5

Der Operator

$$(13.30) \quad \begin{aligned} A &: Z \rightarrow Z \\ Av &:= (A_1(v_1 + u_{10}), A_2(v_2 + u_{20})) \end{aligned}$$

ist beschränkt und hat die folgenden Eigenschaften :

$$(13.31) \quad K_1 \|v-w\|_Z \leq \|Av - Aw\|_Z \leq K_2 \|v-w\|_Z, \quad \forall v, w \in Z$$

$$(13.32) \quad A \text{ ist surjektiv}$$

$$(13.33) \quad A|_{Y_0} : Y_0 \rightarrow Y \text{ ist beschränkt}$$

$$(13.34) \quad \frac{\partial}{\partial t}(Av) \in Z, \quad \forall v \in X$$

Beweis :

Die Beziehungen (13.31), (13.33) und (13.34) folgen aus den Eigenschaften von b , S und u_0 , sowie aus der Definition von X . (13.32) folgt aus der Tatsache, daß A ein monotoner, koerzitiver, stetiger und beschränkter Operator von Z nach $Z (=Z')$ ist. /

Bemerkung 13.6

Die folgenden Abschätzungen sind gültig (o.E. $0 < \epsilon < 1$) :

$$(13.35) \quad \|u_\epsilon\|_{Y_0} \leq K$$

$$(13.36) \quad \epsilon^{1/2} \left\| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right\|_Z \leq K$$

$$(13.37) \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t}(Au_\epsilon) \right\|_{L_2(0, T-\epsilon; W')} \leq K_T, \quad \forall T : 0 < T < T$$

Beweis :

Aus (13.29) folgt mit (13.28) und (12.26) die Ungleichung

$$(13.38) \quad K_0 \geq K_1 \cdot \|u\|_{Y_0}^2 - K_2 \cdot \|u\|_{Y_0} + K_3 \cdot (\epsilon^{1/2} \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_Z)^2 - K_4 \cdot \epsilon^{1/2} (\epsilon^{1/2} \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_Z),$$

woraus man (13.35) und (13.36) erhält.

(13.37) macht etwas mehr Mühe. Aus (13.29) folgt $l_\epsilon(u_\epsilon/w) = 0$ für alle $w \in X$. Speziell gilt dies für alle $w \in X$ von der folgenden Gestalt :

$$(13.39) \quad w = f \cdot z ; \quad f \in C^1(0;T) ; \quad f(0) = f(T) = 0 ; \quad z \in W$$

Dann erhält man die Gleichung

$$(13.40) \quad \epsilon \cdot \int_0^T (\frac{\partial}{\partial t} (Au_\epsilon)(t)/z)_H \cdot f'(t) dt = \int_0^T (Au_\epsilon(t)/z)_H \cdot f'(t) dt \\ = \int_0^T q_\epsilon(t)(z) \cdot f(t) dt$$

In (13.40) bezeichnet $(\cdot / \cdot)_H$ das Skalarprodukt von H . Der Term $q_\epsilon(t)(z)$ ist folgendermaßen definiert :

$$(13.41) \quad q_\epsilon(t)(z) = - \int_{G_1} (a_1 n_1 \circ \nabla(u_{\epsilon 1} + u_{10}) + n_3 \circ \nabla(b s(u_{\epsilon 1} + u_{10}) - \bar{v} \cdot \Lambda_1(u_{\epsilon 1} + u_{10})) \circ \nabla z_1) dx \\ - \int_{G_2} (a_2 n_2 \circ \nabla(u_{\epsilon 1} + u_{10})) \circ \nabla z_2 + F(u_{\epsilon 2} + u_{20}) z_2 dx \\ + \int_{S_{12}} \bar{v} \cdot \Lambda_1(u_{\epsilon 1} + u_{10}) \cdot z_1 ds, \quad \forall z \in W$$

Aus (13.41) folgt, daß

$$(13.42) \quad q_\epsilon \in L_2(0,T;W')$$

gilt und daß die q_ϵ in ϵ beschränkt sind. Aus (13.40) erhält man, daß die folgende gewöhnliche Differentialgleichung in W' im verallgemeinerten Sinne gilt.

$$(13.43) \quad -\varepsilon \cdot (\Lambda u_\varepsilon)'(t) + (\Lambda u_\varepsilon)'(t) = q(t) \in W', \text{ für fast alle } t \in (0; T)$$

Man wähle nun eine Funktion $f \in C^1(0; T)$ mit den Eigenschaften, daß $f \equiv 1$ in einer Umgebung von 0 und $f \equiv 0$ in einer Umgebung von 1 gilt, Außerdem gelte $0 \leq f \leq 1$. Dann folgt aus (13.43), wenn man (13.43) skalar mit $f \cdot (\Lambda u_\varepsilon)'$ multipliziert, die Gleichung :

$$(13.44) \quad -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^T f(t) \cdot \frac{d}{dt} (\|(\Lambda u_\varepsilon)'(t)\|_{W'}^2) dt + \int_0^T f(t) \cdot \|(\Lambda u_\varepsilon)'(t)\|_{W'}^2 dt \\ = \int_0^T f(t) \cdot (q(t) / (\Lambda u_\varepsilon)'(t))_{W'} dt$$

In (13.44) bezeichnet $(\cdot / \cdot)_{W'}$ das Skalarprodukt des Hilbertraumes W' . Mit $\|\cdot\|_{W'}$ ist seine Norm gemeint.

Mit partieller Integration nach t und den Eigenschaften von f und q_ε folgt aus (13.44) die Ungleichung :

$$(13.45) \quad \|f^{1/2} \cdot (\Lambda u_\varepsilon)'\|_{Y_0'}^2 \leq K_f + \|f^{1/2} \cdot q_\varepsilon\|_{Y_0'} \cdot \|f^{1/2} \cdot (\Lambda u_\varepsilon)'\|_{Y_0'}$$

Da f bis auf die oben genannten Eigenschaften beliebig gewählt war, folgt mit (13.45), (13.42) sowie der folgenden Anmerkung die Behauptung (13.37). /

Bemerkung 13.7

Es existiert eine Teilfolge der verallgemeinerten Folge (u_ε) , die ebenfalls wieder mit (u_ε) bezeichnet wird, und ein $\bar{u} \in Y_0$ mit den Eigenschaften :

$$(13.46) \quad u_\varepsilon \longrightarrow \bar{u} \quad \text{in } Y_0, \quad \text{falls } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$(13.47) \quad \Lambda u_\varepsilon \longrightarrow \Lambda \bar{u} \quad \text{in } Y, \quad \text{falls } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$(13.48) \quad u_\varepsilon \longrightarrow \bar{u} \quad \text{in } L_2(0, T-r; H), \quad \forall r: 0 < r < T, \text{ falls } \varepsilon \rightarrow 0$$

Demois :

Aus (13.35) folgt die Existenz einer Teilfolge, die (13.46) erfüllt. Mit (13.35), (13.33), (13.37) und dem Lemma von Aubin (/41/, Chapitre 1, Théorème 5.1) folgt, daß (Λu_ε) kompakt in $L_2(0, T-r; H)$ ist für alle r mit $0 < r < T$. Zu jedem r existiert also eine Teilfolge $(\Lambda u_{\varepsilon_r})$ mit der Eigenschaft

$$(13.49) \quad \Lambda u_{\epsilon_r} \longrightarrow j_r \quad \text{in } L_2(0, T-r; H), \text{ falls } \epsilon_r \rightarrow 0$$

Mit (13.31) und (13.32) folgt

$$(13.50) \quad u_{\epsilon_r} \longrightarrow \Lambda^{-1} j_r \quad \text{in } L_2(0, T-r; H), \text{ falls } \epsilon_r \rightarrow 0$$

Aus (13.46) folgt insbesondere weiter $\bar{u} = \Lambda^{-1} j_r$, für alle $r : 0 < r < T$. Mit dem Diagonalverfahren wählt man eine Teilfolge aus, die wiederum mit (u_{ϵ}) bezeichnet wird und die (13.48) erfüllt. Wegen (13.35), (13.33) und (13.46) läßt sich eine weitere Teilfolge auswählen, die (13.47) erfüllt.

Satz 13.3 (Existenz einer Lösung des verallgemeinerten pseudo-parabolischen Problems)

Es existiert ein $\bar{u} \in Y_0$ mit der Eigenschaft

$$(13.51) \quad l(\bar{u} / w) = 0 \quad \forall w \in X$$

Beweis :

Betrachtet man die Teilfolge (u_{ϵ}) und das Element $\bar{u} \in Y_0$ aus Bemerkung 13.7, so folgt aus der Tatsache, daß $l_{\epsilon}(u_{\epsilon}/w) = 0$ für alle $w \in X$ gilt, die Gleichung :

$$(13.52) \quad \epsilon \cdot ((\Lambda u_{\epsilon})' / w')_Z - (\Lambda u_{\epsilon} / w')_Z + G(u_{\epsilon})(w) = 0, \forall w \in X$$

$(\cdot / \cdot)_Z$ bezeichnet das Skalarprodukt des Hilbertraumes Z . Der Term $G(v)(w)$ ist für alle $v, w \in X$ folgendermaßen definiert :

$$(13.53) \quad G(v)(w) = \int_{\Omega_1} (a_1(D_1 - D_3) \circ \nabla(v_1 + u_{10}) + D_3 \circ \nabla(\Lambda_1(v_1 + u_{10}))) - \bar{v} \cdot \Lambda_1(v_1 + u_{10}) \circ \nabla w_1 \, dx dt \\ + \int_{\Omega_2} (a_2 D_2 \circ \nabla(v_2 + u_{20})) \circ \nabla w_2 + F(v_2 + u_{20}) \cdot w_2 \, dx dt - \int_{\Gamma_{12}} \bar{v}_+ \cdot \Lambda_1(v_1 + u_{10}) \cdot w_1 \, ds dt, \quad \forall v, w \in X$$

Mit (13.36) folgt

$$(13.54) \quad \left| \epsilon \cdot ((\Lambda u_\epsilon)' / w')_Z \right| \leq \epsilon^{1/2 \cdot K} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \forall w \in X$$

Weiter gilt wegen (13.47) :

$$(13.55) \quad (\Lambda u_\epsilon / w')_Z \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (\Lambda \bar{u} / w')_Z, \forall w \in X$$

Die Definition von $G(v)(w)$ in (13.53) ist nicht nur für alle $v \in X$ gültig, sondern für alle $v \in Y_0$. Mit den Aussagen von Bemerkung 13.7 folgt deshalb

$$(13.56) \quad G(u_\epsilon)(w) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} G(\bar{u})(w), \forall w \in X$$

Das bedeutet aber, das (13.52) übergeht in

$$(13.57) \quad 0 = - (\Lambda \bar{u} / w')_Z + G(\bar{u})(w) = 1(\bar{u} / w), \forall w \in X$$

Damit ist (13.38) nachgewiesen. /

14. Regularität

Die Regularität der Lösung des verallgemeinerten, pseudoparabolischen Problems, insbesondere also die Forderung an die verallgemeinerte Lösung, auch Lösung im klassischen Sinne zu sein, läßt sich nicht einfach durch Anwendung vorhandener Methoden nachweisen. Eine Grundvoraussetzung für die Anwendung der von LADYZHENSKAYA et al. (/37/) angegebenen Methoden, die Bedingung $\bar{u} + u_0 \in C([0;T];H)$, folgt nicht aus der für den pseudoparabolischen Fall modifizierten Methode der elliptischen Regularisierung. Im parabolischen Fall folgt diese Bedingung durch Interpolation im Sinne von LIONS und MAGENES (/43/). Im pseudoparabolischen Fall erhält man eine schwächere Aussage. Aus (13.37) und (13.47) folgt lediglich durch Interpolation

$$\bar{u} \in C([0;T]; [V, W']_{1/2}),$$

wobei $[V, W']_{1/2}$ einen Interpolationsraum im Sinne von /43/ darstellt, in den H linear und stetig eingebettet ist.

Im elliptischen Fall findet man eine günstigere Situation vor. Hier ist es möglich, durch Anwendung vorhandener Methoden (/19/, /21/, /36/, /65/, /66/) nachzuweisen, daß die verallgemeinerte Lösung des elliptischen Problems auch Lösung im klassischen Sinne ist. Die Räume der Funktionen mit Hölderstetigen Ableitungen bis zur Ordnung $m, C_{m,\beta}(G)$, $\beta \in (0,1]$, $m \geq 0$, seien definiert wie in /35/, S. 4 ff.

Im Weiteren bezeichne ich mit

$$(14.1) \quad u = \bar{u} + u_0 \in V$$

die verallgemeinerte Lösung des elliptischen Problems. Mit dem Gauss'schen Satz, der Eigenschaften von $\bar{v}_+$ auf ∂G_1 und der Definition von W folgt aus (12.9), daß für u die Beziehung

$$(14.2) \quad \int_{G_1} (a_1 D_1 u + D_3 u \nabla(bS(u_1))) \nabla w_1 + \bar{v}_0 \nabla(a_1 u_1) \cdot w_1 \, dx + \int_{G_2} (a_2 D_2 u \nabla w_2 + F(u_2) \cdot w_2 \, dx = 0, \quad \forall w \in W$$

erfüllt ist.

Bemerkung 14.1

$$(14.3) \quad u \in L_{\infty}(G_1) \times L_{\infty}(G_2)$$

Beweis

Der Beweis verläuft analog zum Beweis in /65/ für lineare Gleichungen. Zunächst werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt :

$$(14.4) \quad u := \begin{cases} u_1 & \text{auf } G_1 \\ u_2 & \text{auf } G_2 \end{cases}$$

Für $k \in \mathbb{R}$ möge gelten

$$(14.5) \quad u_k^+ := \begin{cases} \max(u_1 - k; 0) & \text{auf } G_1 \\ \max(u_2 - k; 0) & \text{auf } G_2 \end{cases}$$

$$(14.6) \quad u_k^- := \begin{cases} \min(u_1 - k; 0) & \text{auf } G_1 \\ \min(u_2 - k; 0) & \text{auf } G_2 \end{cases}$$

$$(14.7) \quad \Lambda_k^{\pm} := \{x \mid x \in G_1 \cup G_2; u_1(x) \gtrless k \text{ oder } u_2(x) \gtrless k\}$$

Es existiert ein $\bar{k} \in \mathbb{R}_+$, sodaß

$$(14.8) \quad -\bar{k} \leq u_{11} \Big|_{G_{11}} \leq \bar{k}$$

gilt. Für alle $k \geq \bar{k}$ gilt insbesondere

$$(14.9) \quad u_k^+, u_{-k}^- \in W$$

und für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt

$$(14.10) \quad \nabla u_k^{\pm} = \begin{cases} \nabla u_i & \text{auf } \Lambda_k^{\pm} \cap G_i \quad (i=1,2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gleichung (14.2) ist also insbesondere für alle $w = u_k^{\pm}$, wobei $k \geq \bar{k}$ gilt, erfüllt. Mit der Hölder'schen und der Young'schen Ungleichung, der Elliptizitätsbedingung und der Beschränktheit der Koeffizienten erhält man die folgende Abschätzung :

$$(14.11) \quad \int_{\Lambda_k^+} |\nabla u|^2 dx \leq K_1 \cdot \int_{\Lambda_k^+} (u - k)^2 dx + K_2$$

Eine analoge Ungleichung erhält man für $k \leq -\bar{K}$ auf Λ_k^- . Die Lemmata (4.1) und (4.2) in /65/ ergeben :

Es existieren $r, d > 0$, sodaß für alle $k \geq \bar{K}$ gilt :

$$(14.12) \quad \text{vol}(\Lambda_k^+) < r \Rightarrow \text{vol}(\Lambda_{k+d}^+) = 0$$

und

$$(14.13) \quad \text{vol}(\Lambda_{-k}^-) < r \Rightarrow \text{vol}(\Lambda_{-k-d}^-) = 0$$

Damit folgt die Existenz eines $K_0 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$(14.14) \quad -K_0 \leq u(x) \leq K_0 \quad \text{fast überall auf } G_1 \cup G_2 \cup /$$

Bemerkung 14.2

Es existiert ein $\beta \in (0; 1]$ mit

$$(14.15) \quad u \in C_{0,\beta}(G_1 \cup S_{11} \cup S_{12} \cup S_0) \times C_{0,\beta}(G_2 \cup S_2 \cup S_0)$$

Beweis

Mit den Methoden von /36/ weist man zunächst nach , daß u_1 und u_2 auf allen kompakten Teilmengen von G_1 bzw G_2 Hölderbedingungen erfüllen.

Ist K_r eine Kugel in G_1 mit Radius r , so gelte $\Lambda_{k,r}^+ := \Lambda_k^+ \cap K_r$. In analoger Weise sei $\Lambda_{k,r}^-$ definiert. z sei eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit Träger in K_r und Wertebereich $[0; 1]$ mit den Eigenschaften :

$$(14.16) \quad z \equiv 1 \quad \text{auf } K_{r(1-s)} \quad , \quad 0 \leq s \leq 1$$

$$| \nabla z | \leq \frac{c}{sr}$$

Dabei bezeichnet $K_{r(1-s)}$ eine zu K_r konzentrische Kugel mit Radius $r(1-s)$. Für $w = z^2 \cdot u_k^+$ gilt Gleichung (14.2). Mit ähnlichen Techniken wie bei der Ableitung der Ungleichung (14.11) erhält man :

$$(14.17) \quad \int_{\Lambda_{k,r(1-s)}^+} |\nabla u_1|^2 dx \leq K_1 \cdot ((sr)^{-2} \cdot \sup_{\Lambda_{k,r}^+} \text{ess } (u_1 - k)^2 + 1) \cdot \text{vol}(\Lambda_{k,r}^+)$$

Eine ähnliche Gleichung wie (14.17) läßt sich für $\bar{A}_{k,r(1-\varepsilon)}^+$ nachweisen. Mit Theorem 6.1 in /36/ (S.90) hat man, daß Funktionen dieser Art auf allen Kugeln K_r in G_1 hölderstetig sind. Analog erhält man, daß u_2 auf allen Kugeln K_r in G_2 hölderstetig ist. Ebenso kann man Gleichungen wie (14.17) für Kugeln K_r mit Zentrum auf S_{11} nachweisen, die mit $\partial G_1 \setminus S_0$ und $\partial G_2 \setminus S_0$ einen leeren Schnitt haben. Damit hat man die Hölderstetigkeit von u_1 auf allen kompakten Teilmengen von $G_1 \cup S_n$ und von u_2 auf allen kompakten Teilmengen von $G_2 \cup S_0$.

Erfüllt u_{10} auf S_{11} eine Hölderbedingung, so erhält man eine Ungleichung wie (14.17) für Kugeln K_r , die ihren Mittelpunkt auf S_{11} haben, aber $\partial G_1 \setminus S_{11}$ nicht schneiden, und für $k \geq \bar{k}$ bzw. $k \leq -\bar{k}$. Theorem 7.1 in /36/ (S.91) besagt, daß u_1 dann eine Hölderbedingung auf allen kompakten Teilmengen von $G_1 \cup S_{11}$ erfüllt.

Sei S'_{12} eine Teilmenge von S_{12} , die sich durch eine Darstellung in lokalen Koordinaten $y=y(x)$ in eine Teilmenge der Hyperebene $y_n=0$ überführen läßt. Es gelte $S'_{12} = y(S'_{12})$. K_r sei eine Kugel mit Zentrum auf S'_{12} , die das Bild von $\partial G_1 \setminus S_{12}$ nicht schneidet. z sei eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger in K_r und Wertebereich $[0;1]$. Analog wie bei der Ableitung von (14.17) erhält man die Ungleichung

$$(14.18) \quad \int_{\bar{A}_{k,r}^+} |\nabla u_1|^2 z^2 dy \leq K_1 \left(\int_{\bar{A}_{k,r}^+} (u_1 - k)^2 |\nabla z|^2 dy + \text{vol}(\bar{A}_{k,r}^+) \right)$$

Dabei gilt natürlich $\bar{A}_{k,r}^+ := \bar{A}_k^+ \cap K_r$, wobei $\bar{A}_k^+$ definiert ist durch die Bedingung $u(y) > k$. Eine analoge Ungleichung zeigt man auf $\bar{A}_{k,r}^-$.

Mit Theorem 7.2, /36/ (S.94) hat man die Hölderstetigkeit von u_1 auf allen kompakten Teilmengen von $G_1 \cup S_{12}$.

Mit dem gleichen Vorgehen erhält man die Hölderstetigkeit von u_2 auf allen kompakten Teilmengen von $G_2 \cup S_2$.

Anzumerken bleibt, daß über die Regularität in den Punkten von $\partial G_1 \setminus S_{11} \setminus S_{12} \setminus S_0$ bzw. $\partial G_2 \setminus S_2 \setminus S_0$ nichts ausgesagt wurde. Mit Bemerkung 14.2 folgt insbesondere, daß die Dirichletbedingung auf S_{11} und die Transmissionsbedingung $u_1 = u_2$ auf S_0 im klassischen Sinne erfüllt sind.

Bemerkung 14.3

Es gilt

$$(14.18) \quad u \in H^2(G_1') \times H^2(G_2')$$

$$(14.19) \quad \sup_{G_1'} \operatorname{ess} |\nabla u_i| < \infty, \quad i=1,2$$

Für alle G_i' ($i=1,2$) mit der Eigenschaft $\bar{G}_i' \in G_i$ ($i=1,2$).

Weiter gilt :

$$(14.20) \quad u_i \text{ erfüllt (11.13) fast überall in } G_i \quad (i=1,2)$$

Beweis

Da der Beweis der Aussagen (14.18) - (14.20), insbesondere (14.19), relativ kompliziert und länglich ist, er andererseits in /36/ ausgeführt wird, möchte ich an dieser Stelle nur das entsprechende Theorem in /36/ und dessen Voraussetzungen angeben.

Schreibt man die Gleichungen (11.13) in der in /36/ verwendeten Form, so gilt :

$$(14.21) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i^1(x, u_1, \nabla u_1) + a^1(x, u_1, \nabla u_1) = 0 \text{ auf } G_1, i=1,2$$

$$(14.22) \quad a_i^1(x, u_1, p) = \sum_{k=1}^n (a_1 d_{1ik} + b d_{3ik} S'(u_1)) \cdot p_k \\ + S(u_1) \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_{3ik} \frac{\partial b}{\partial x_k} - \bar{v}_1 b \right) - a_1 \bar{v}_1 u_1, \quad i=1, \dots, n$$

$$(14.23) \quad a^1(x, u_1, p) = 0$$

$$(14.24) \quad a_i^2(x, u_2, p) = \sum_{k=1}^n a_2 d_{2ik} p_k, \quad i=1, \dots, n$$

$$(14.25) \quad a^2(x, u_2, p) = -F(u_2)$$

Die folgenden Strukturbedingungen sind wegen der Beschränktheit der Koeffizienten, der Elliptizität und der Struktur der Terme (14.22) - (14.25) erfüllt :

$$(14.26) \quad f_1(|u_1|) \cdot |z|^2 = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_i^1}{\partial p_k} \cdot z_i z_k \leq g_1(|u_1|) \cdot |z|^2, \quad i=1,2$$

$$(14.27) \quad \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{\partial a_i^1}{\partial u_1} \right| + |a_i^1| \right) \cdot (1 + |p|) + \sum_{i,k=1}^n \left| \frac{\partial a_i^1}{\partial x_k} \right| + |a_i^1| \\ \leq g_1(|u_1|) \cdot (1 + |p|)^2, \quad l=1,2$$

$$(14.28) \quad \left(\sum_{i,k=1}^n \left| \frac{\partial a_i^1}{\partial x_k} \right| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial a_i^1}{\partial u_1} \right| \right) \cdot (1 + |p|) + \left| \frac{\partial a_i^1}{\partial u_1} \right| \\ + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial a_i^1}{\partial x_1} \right| \leq h_1(|u_1|) \cdot (1 + |p|)^2, \quad l=1,2$$

$f_1(t)$, $g_1(t)$ und $h_1(t)$ ($l=1,2$) sind positive, stetige Funktionen, wobei f_1 für $t \geq 0$ nichtansteigend und g_1 , h_1 für nichtnegative t nichtabfallend ist.

Mit (14.26) - (14.28) und Bemerkung 14.1 sind die Hauptvoraussetzungen von Theorem 5.2 in /36/ (S.277) erfüllt. (14.18) - (14.20) sind gerade die Aussagen des Theorems.

Bemerkung 14.4

Es existiert ein $\alpha \in (0;1]$ mit der Eigenschaft

$$(14.29) \quad u \in C_{1,\beta}(G_1^1) \times C_{1,\beta}(G_2^1)$$

für alle G_i^1 mit $\bar{G}_i^1 \subset G_i$ ($i=1,2$).

Beweis

Mit den Bemerkungen 14.1 und 14.2 folgt, daß u eine beschränkte verallgemeinerte Lösung im Sinne von /36/ mit beschränkten ersten Ableitungen auf allen kompakten Teilmengen von G_i ($i=1,2$) ist. Mit den Bezeichnungen, die im Beweis von Bemerkung 14.3 eingeführt wurden, gelten die folgenden Strukturbedingungen:

$$(14.30) \quad \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_i^1}{\partial x_k} z_1 z_k \geq \mu_1 |z|^2; \quad \mu_1 > 0, \quad l=1,2$$

$$(14.31) \quad \max_{i,j} \left(\left\| \frac{\partial a_i^1}{\partial u_1} \right\|_{l_\infty(G_1^1)}; \left\| \frac{\partial a_i^1}{\partial x_j} \right\|_{l_\infty(G_1^1)}; \|a_i^1\|_{l_\infty(G_1^1)} \right) \leq K_1 < \infty$$

In (14.31) ist K_1 von G_1^1 ($l=1,2$) abhängig.

Damit sind die Voraussetzungen des Theorems 6.2 in /36/ (S.282) erfüllt. (14.29) ist die Aussage dieses Theorems.

Bemerkung 14.5

Es existiert ein $\theta \in (0; 1]$ mit der Eigenschaft

$$(14.32) \quad u \in C_{2,\theta}(G'_1) \times C_{2,\theta}(G'_2)$$

für alle G'_i mit $\bar{G}'_i \subset G_i$ ($i=1,2$).

Beweis

$$\begin{aligned} \text{Es sei } M &:= \sup_{\bar{G}'_1} |u_1|, \quad M_1 := \sup_{\bar{G}'_1} |\nabla u_1|, \\ T &:= \{x \in \bar{G}'_1, \quad |u| \leq M, \quad |p| \leq M_1\}. \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten der Gleichungen (11.13) mit ihren ersten Ableitungen auf $\bar{G}'_1$, S, S', S'' auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ Hölderbedingungen erfüllen und da F Lipschitzstetig ist, folgt:

$$(14.33) \quad a_k^i(x, u_1, p) \in C_{1,\theta}(T) \quad ; \quad a^i(x, u_1, p) \in C_{0,1}(T)$$

Weiterhin sind die Strukturbedingungen (14.26) - (14.28) erfüllt.

Damit sind aber die Voraussetzungen für die Anwendung von Theorem 6.4 in /36/ (S.204) gegeben, das (14.32) zur Aussage hat.

Bemerkung (14.5) hat mit (14.20) zur Folge, daß u_i ($i=1,2$) die Gleichung (11.13) auf G_i im klassischen Sinne erfüllt.

Nachdem bisher Schranken für die Gradienten im Inneren angegeben wurden, sollen nun solche Schranken für Bereiche bis zum Rande hin angegeben werden.

Bemerkung 14.6

Es existiert ein $\theta \in (0, 1]$ mit der Eigenschaft

$$(14.33) \quad u \in C_{1,\theta}(\bar{G}'_1) \times C_{1,\theta}(\bar{G}'_2)$$

für alle G'_i, G'_2 mit $\bar{G}'_i \subset G_i \cup S_{12}$; $\bar{G}'_2 \subset G_2 \cup S_2$.

Beweis

Da der Beweis von (14.33) relativ lang ist, er aber andererseits in /36/ (S.465 ff.) ausgeführt ist, will ich ihn hier nur skizzieren.

Sei S'_1 ein glatter Teilbereich von S_{12} bzw. S_2 , der mit Hilfe lokaler Darstellungen $y=y(x)$ in einen Teilbereich der Hyperebene $y_n = 0$ transformiert wird. Wie in /36/ (S.466 ff.) ausgeführt, beweist man

zunächst die Existenz von Schranken für die Absolutwerte der tangentialen Ableitungen von u_j ($\frac{\partial u_i}{\partial y_r}$, $r \neq n$) auf $G_1^!$. Da die Gleichung (11.13) auf G_1 gilt ($i=1,2$), erhält man mit der Randbedingung in verallgemeinerter Form Schranken für die Absolutwerte der Normalenableitung von u_1 ($\frac{\partial u_i}{\partial y_n}$) auf $S_1^!$. Dies ergibt Schranken für $|\nabla u_1|$ auf $S_1^!$. Hat man weiter nachgewiesen (siehe ebenfalls /36/, S.468 ff), daß eine Schranke für

$$\int_{G_1^!} |\nabla u_1|^2 dy$$

für alle $\lambda > 0$ existiert, so läßt sich eine Schranke für $|\nabla u_1|$ auf $G_1^!$ ableiten. Daraus ergibt sich eine Schranke für

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_r} \right| (\beta), G_1^! \quad . /$$

(Die Bezeichnungsweise im Beweis orientiert sich an /36/, wo ebenfalls zwischen $S_1^!$ bzw $G_1^!$ und $y(G_1^!)$ bzw $y(G_1^!)$ nicht unterschieden wird.)

Bemerkung 14.7

(14.34) u ist klassische Lösung

Beweis

(14.34) folgt im Wesentlichen aus den Bemerkungen 14.2 - 14.6 und mit der Anwendung des Gauss'schen Satzes. Mit den Eigenschaften von b und $\bar{V}$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von S_0 erhält man mit dem Vorgehen von /66/ und /8/, daß die Transmissionsbedingung (11.12) im Inneren von S_0 gilt. /

Anzumerken ist, daß bei allen Regularitätsaussagen für das Verhalten von u_1 auf dem Rande die Punkte von $\partial G_2 \setminus S_0 \setminus S_2$ ausgenommen sind.

15. Eindeutigkeit

Über die Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösungen lassen sich mit den für den Existenzbeweis benutzten Methoden keine Aussagen ableiten. Ebenso versagen die üblichen Methoden, die Maximumsprinzipien beinhalten, wenn man die Eindeutigkeit einer klassischen Lösung des elliptischen oder des pseudoparabolischen Problems zeigen will. Eine Eindeutigkeitsaussage ist jedoch im pseudoparabolischen Fall möglich, wenn man die nichtlineare Randbedingung auf Γ_{12} durch eine Dirichletbedingung ersetzt. Wie schon früher bemerkt, bleibt auch für diesen Fall die Existenzaussage von Abschnitt 13 gültig. Die folgende Bemerkung läßt sich mit den in /56/ angegebenen Maximumsprinzipien nachweisen.

Bemerkung 15.1

Es gibt höchstens eine klassische Lösung des pseudoparabolischen Problems, die auf $\Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}$ die Randbedingung (11.8) erfüllt. (Randbedingung (11.9) entfällt.)

Beweis

Seien u, v klassische Lösungen des pseudoparabolischen Problems mit den angegebenen Eigenschaften. Dann erfüllt

$$(15.1) \quad w := u - v$$

die folgenden Differentialgleichungen auf Q_i ($i=1,2$).

$$(15.2) \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^1 \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n a_i^1 \frac{\partial w_1}{\partial x_i} + a^1 \cdot w_1 - \frac{\partial w_1}{\partial t} = 0 \quad \text{auf } Q_i \quad i=1,2$$

Dabei gilt :

$$(15.3) \quad a_{ik}^1 = \frac{a_1 \cdot d_{1ik} + b h_1 \cdot d_{3ik}}{a_1 + b h_1} \quad , \quad i, k = 1, \dots, n$$

$$(15.4) \quad a_i^1 = \frac{\sum_{k=1}^n \left(a_1 \frac{\partial d_{1ik}}{\partial x_k} + 2 d_{3ik} \frac{\partial (b h_1)}{\partial x_k} + \frac{\partial d_{3ik}}{\partial x_k} \cdot b h_1 \right)}{a_1 + b h_1} - \bar{v}_i$$

$i=1, \dots, n$

$$(15.5) \quad a^1 = \frac{\sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial d_{3ik}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial(bh_1)}{\partial x_k} + d_{3ik} \frac{\partial^2(bh_1)}{\partial x_i \partial x_k} \right)}{a_1 + bh_1} - \frac{\sum_{i=1}^n \bar{v}_i \frac{\partial(bh_1)}{\partial x_i} + \frac{\partial(bh_1)}{\partial t}}{a_1 + bh_1}$$

$$(15.6) \quad a_{ik}^2 = d_{2ik} \quad , \quad i, k=1, \dots, n$$

$$(15.7) \quad a_i^2 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial d_{2ik}}{\partial x_k} \quad , \quad i=1, \dots, n$$

$$(15.8) \quad a^2 = -\frac{h_2}{a_2}$$

Die Funktionen h_i ($i=1,2$) sind wie folgt definiert

$$(15.9) \quad h_1 = \frac{S(u_1) - S(v_1)}{u_1 - v_1}$$

$$(15.10) \quad h_2 = \frac{F(u_2) - F(v_2)}{u_2 - v_2}$$

Außer den Differentialgleichungen (15.2) erfüllt w auf Γ_{11} und Γ_{12} und für $t=0$ homogene Dirichletbedingungen. Auf Γ_0 bzw Γ_2 sind die übrigen Transmissionsbedingungen bzw Randbedingungen erfüllt.

(15.2) stellt gleichmäßig parabolische Differentialgleichungen mit beschränkten Koeffizienten dar. Durch die Transformation

$$(15.11) \quad \bar{w} := \exp(-st) \cdot w \quad , \quad (s \text{ positiv, hinreichend groß})$$

werden die Differentialgleichungen (15.2) in Gleichungen von ähnlcher Gestalt überführt, die ebenfalls gleichmäßig parabolisch sind, beschränkte Koeffizienten besitzen und deren Koeffizienten von $\bar{w}_1$ nichtpositiv sind. Die Rand- bzw Transmissionsbedingungen und die Anfangsbedingungen werden von $\bar{w}$ in gleicher Weise erfüllt.

Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 7 in /56/ (S.174) erfüllt. Besitzt $\bar{w}_2$ ein positives Maximum, so muß dieses auf $\partial G, x(0,T)$ oder für $t=0$ auftreten. Mit der Anfangsbedingung und der Randbedingung auf Γ_2 folgt, daß es auf Γ_0 liegen muß. Dann besitzt aber auch $\bar{w}_1$ ein positives Maximum, das mit gleicher Argumentation auf Γ_0 liegen muß. Damit folgt

$$(15.12) \quad \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \nu_{D_1}} < 0 \text{ auf } \Gamma_0 ; \quad \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \nu_{D_2}} < 0 \text{ auf } \Gamma_0 .$$

Aus (15.12) folgt aber, daß dann die Transmissionsbedingung (11.12) verletzt ist. Also gilt $\bar{w}_2 \leq 0$ auf Q_2 . Mit ähnlichen Überlegungen für $\bar{w}_2$ folgt $-\bar{w}_2 \leq 0$. Damit gilt $\bar{w}_2 = 0$ auf Q_2 . Aus gleichen Überlegungen für $\bar{w}_1$, das dann ja eine Dirichlethbedingung auch auf Γ_0 erfüllt ($\bar{w}_1 = \bar{w}_2 = 0$ auf Γ_0), folgt $\bar{w}_1 = 0$ auf Q_1 . /

16. Zusammenfassung und Diskussion der mathematischen Ergebnisse

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die Transportmechanismen von Sauerstoff in Blut und Gewebe in möglichst allgemeiner Form modellmäßig beschrieben. Dazu wurden Modellvorstellungen aus der physiologischen und physikalischen Literatur herangezogen. Nach Formulierung und Begründung der physiologischen und physikalischen Voraussetzungen erfolgte die Übersetzung in ein mathematisches Problem.

Im stationären Fall erhält man ein quasilineares, elliptisches Transmissionsproblem. Die dem Problem zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen liegen in Divergenzform vor und erfüllen in der mathematischen Literatur gebräuchliche Strukturbedingungen. Die Rand- und Transmissionsbedingungen sind in dem Sinne 'natürlich', daß die zugehörigen Randoperatoren bei der Anwendung des Gauss'schen Satzes auftreten. Zunächst wird die Existenz einer Lösung eines verallgemeinerten Problems nachgewiesen. Dies gelingt mit Hilfe der Theorie der pseudomonotonen Operatoren, da sich der resultierende Operator als koerzitiv und pseudomonoton erweist. Mit üblichen Methoden der Regularitätstheorie wird dann nachgewiesen, daß diese verallgemeinerte Lösung auch Lösung des klassischen Problems ist. Die für die Existenz der verallgemeinerten Lösung benutzten Methoden lassen keine Eindeutigkeitsaussage zu, ebenso versagen Methoden, die Maximumprinzipien beinhalten, beim Nachweis der Eindeutigkeit der klassischen Lösung.

Im zeitabhängigen Fall erhält man ein quasilineares, pseudoparabolisches Transmissionsproblem. Auch hier liegen die dem Problem zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen in Divergenzform vor mit ähnlicher Struktur wie im stationären Fall. Auch die Anfangs-, Rand- und Transmissionsbedingungen sind in dem oben erwähnten Sinne 'natürlich'. Zunächst weist man die Existenz einer Lösung eines regularisierten verallgemeinerten Problems nach. Das diesem verallgemeinerten Problem zugeordnete klassische Problem entspricht einem quasilinearen, elliptischen Transmissionsproblem. Die Existenz einer Lösung des verallgemeinerten (regularisierten) Problems läßt sich deshalb auch mit den gleichen Methoden wie im stationären Fall nachweisen. Mit bei der elliptischen Regularisierung von parabolischen Problemen üblichem Vorgehen gewinnt man die Lösung des verallgemei-

nerten Problems als Häufungspunkt der Lösungen des regularisierten Problems in einer geeigneten Topologie. Die Eigenschaften dieser Lösung sind schwächer als im parabolischen Fall. Aus diesem Grunde gelingt es nicht, übliche Methoden der Regularitätstheorie anzuwenden, um nachzuweisen, daß die verallgemeinerte Lösung auch Lösung im klassischen Sinne ist. Die Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung konnte ebenfalls nicht nachgewiesen werden. Es ist jedoch möglich, eine Eindeutigkeitsaussage für die klassische Lösung eines leicht abgeänderten Problems zu formulieren, bei dem eine nichtlineare Randbedingung durch eine Dirichletbedingung ersetzt wird. Dies geschieht mit Hilfe üblicher Maximumsprinzipien. Über das Verhalten der Lösung für große Zeitwerte konnten keine Aussagen gemacht werden.

Transmissionsprobleme wurden eingeführt von PICONE (/55/) für ein Problem der Elastizitätstheorie. In den folgenden Jahren wurde diese Problematik intensiv bearbeitet von STAMPACCHIA (/66/), TROISI (/71/, /72/, /73/), SCHLICHTER (/62/) und CAMPANATO (/8/), um nur einige Autoren zu nennen. In diesen Arbeiten wurden jedoch lineare, elliptische Differentialgleichungen berücksichtigt. HIDALGO (/28/) bearbeitete 1972 ein quasilineares, parabolisches Transmissionsproblem, wobei er ebenfalls Methoden der Theorie der pseudomonotonen Operatoren und der elliptischen Regularisierung benutzte. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit unterscheiden sich von den Ergebnissen Hidalgos vor allem aufgrund des pseudoparabolischen Charakters der Gleichungen. Ähnlichkeiten bestehen im pseudoparabolischen Fall zu den Ergebnissen von HESS (/29/) für nichtlineare Abbildungen vom monotonen Typ bezüglich zweier Banachräume. Es gelang jedoch nicht, die Methoden von /29/ direkt anzuwenden.

Eine weitere Möglichkeit, Lösungen des verallgemeinerten Problems zu finden, ist die Methode der Ober- und Unterlösungen, wie sie von DEUEL und HESS (/13/, /14/) angegeben wird. Diese Methode hat unter anderem den Vorteil, das man leichter zu Aussagen über die Positivität von Lösungen kommt. Im elliptischen Fall ist die Methode anwendbar, wenn die Existenz von Ober- und Unterlösungen gesichert ist.

Im pseudoparabolischen Fall läßt sich die Methode nicht übertragen, da auf stärkere Ergebnisse von LIONS (/41/) Bezug genommen wird, die dieser für parabolische Gleichungen gewonnen hat.

Am Anfang dieses Abschnittes sind schon einige offene Fragen und ungelöste Probleme genannt worden. Ansatzpunkte für weitere Arbeit sind gegeben durch die Frage nach der Regularität der verallgemeinerten Lösung des pseudoparabolischen Problems, ihrem Verhalten für große Zeitwerte und möglicher Positivität. Im stationären Fall ist ebenfalls die Frage nach der Positivität der Lösung von Interesse.

Im ersten Teil dieser Arbeit wurde die Möglichkeit anderer Transmissionsbedingungen ('endliche Permeabilität') und zeitlich veränderlicher Definitionsbereiche ('zeitlich veränderlicher Kapillar- bzw. Versorgungsbereich') angedeutet. Die Einbeziehung dieser Punkte in die Bearbeitung erforderte den Einsatz anderer Methoden, da allein durch die Änderung der Transmissionsbedingungen die Koerzitivität der elliptischen Probleme verlorenginge.

- / 1 / ADAIR, G.S. : The hemoglobin system VI. The oxygen dissociation curve of hemoglobin
J. Biol. Chem., 63 (1925), 529 - 545

- / 2 / ADAMS, R.A. : Sobolev Spaces
Academic Press, 1975

- / 3 / ANTONINI, E., BRUNORI, M. : Hemoglobin and myoglobin in their reactions with ligands
North Holland Publishing Company, 1971

- / 4 / BIRD, R.B., STEWART, W.E., LIGHTFOOT, E.N. :
Transport Phenomena
Wiley & Sons, 1960

- / 5 / BLUM, J. : Concentration profiles in and around capillaries
Am. J. Physiol., 198 (1960), 991 - 998

- / 6 / BRULEY, D., HUNT, D., BICHER, H., KNISELY, M. :
Simulating myocardium oxygen dynamics
In 'Oxygen Transport to Tissue.37B' (D. Bruley and H. Bicher, Eds.), Plenum Press, 1973, 773-781

- / 7 / BUDO, A. : Theoretische Mechanik
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, Berlin 1965

- / 8 / CAMPANATO, S. : Osservazioni sul problema di trasmissione per equazioni differenziali lineari del secondo ordine
Ric. di Mat., 9 (1960), 43 - 47

- / 9 / CHANCE, B., SCHOENER, B., SCHINDLER, F. :
The intracellular oxidation-reduction state
In 'Oxygen in the Animal Organism' (F. Dickens and E. Neil, Eds.), Pergamon Press (1964), 367-380

- / 10 / CRANK, J. : The Mathematics of Diffusion
Clarendon Press (1970), Oxford

- / 11 / DIEMER, K. : Eine verbesserte Modellvorstellung zur Sauerstoffversorgung des Gehirns
Naturwissenschaften, 50 (1963), 617 - 618

- / 12 / DIEMER, K. : über die Sauerstoffdiffusion im Gehirn
Pflügers Arch., 285 (1965), 99 - 118

- / 13 / DEUEL, J., HESS, P. : A criterion for the existence of nonlinear elliptic boundary value problems
Proc. R.S.E., 74 (1974/75), 49 - 54

- / 14 / DEUEL, J., HESS, P. : Nonlinear parabolic boundary value problems with upper and lower solutions
Israel J. Math., 29 (1978), 92 - 104

- / 15 / DUBINSKIJ, J.A. : Weak convergence in nonlinear elliptic and parabolic equations
Am. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 69 (1968), 226-258

- / 16 / FLETCHER, J. : A mathematical model of the unsteady transport of oxygen to tissues in the microcirculation
In 'Oxygen Transport to Tissue, 378' (D. Bruley and H. Bicher, Eds.), Plenum Press, 1973, 819-826

- / 17 / FLETCHER, J. : A model describing the unsteady transport of substrate to tissue from the microcirculation
SIAM J. Appl. Math., 29 (1975), 449-480

- / 18 / FLETCHER, J. : Mathematical modeling of the microcirculation
Math. Biosci., 38 (1978), 159-202

- / 19 / FRIEDMAN, A. : Partial differential equations
Academic Press, 1969

- / 20 / GAJEWSKI, H., GRÜGER, K., ZACHARIAS, K. :
Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen
Akademievorlag, 1974

- / 21 / GILBARG, D., TRUDINGER, N.S. :
 Elliptic partial differential equations of
 second order
 Springer-Verlag, 1977
- / 22 / GONZALEZ-FERNANDEZ, J., ATTA, S. :
 Transport and consumption of oxygen in capillary-
 tissue structures
 Math. Biosci., 2 (1968), 225-261
- / 23 / GRUNEWALD, W. : Digitale Simulation eines räumlichen
 Diffusionsmodells der O_2 -Versorgung biologischer
 Gewebe
 Pflügers Arch., 309 (1969), 266-284
- / 24 / GRUNEWALD, W. : Bedeutung der Kapillarstrukturen für die
 O_2 -Versorgung der Organe und ihre Analyse anhand
 digital simulierter Modelle
 Habil.-Schrift, Bochum, 1971
- / 25 / GRUNEWALD, W., SOWA, W. :
 Capillary structures and O_2 supply to tissue. An
 analysis with a digital diffusion model applied
 to the skeletal muscle
 Rev. Physiol. Biochem. Pharmacol., 77 (1977), 149-209
- / 26 / HALBERG, M., BRULEY, D., KNISELY, M. :
 Simulating oxygen in the microcirculation by
 Monte Carlo methods
 Simulation, 15 (1970), 206-212
- / 27 / HAMMERSEN, F. : Anatomie der terminalen Strombahn
 Urban & Schwarzenberg, 1971
- / 28 / HIDALGO, M.L. : Ciertos problemas de transmisión sobre
 operadores no lineales de $2.^\circ$ y $4.^\circ$ orden
 parabólicos que cambian de tipo
 Rev. de la Real Acad. de Ciencias, 66 (1972), 221-286

- / 29 / HESS, P. : On nonlinear mappings of monotone type with respect to two Banach spaces
J. Math. Pures et Appl., 52 (1973), 13-26

- / 30 / HUNT, D., BRULEY, D., BICHER, H., KNISELY, M. :
Oxygen transport in the brain microcirculation
by a hybrid computer nonlinear Monte Carlo method
Proc. 1973 Summer Computer Simulation Conference,
2 (1973), 800-805

- / 31 / JOST, W. : Diffusion in solids and gases
Academic Press, 1960

- / 32 / KENDREW, J.C. : Myoglobin und die Struktur der Proteine
Angew. Chem., 75. Jahrgang Nr. 13 (1963), 595-603

- / 33 / KOSHLAND, D.E., NEMETHY, G., FILMER, D. :
Comparison of experimental binding data and
theoretical models in proteins containing subunits
Biochemistry, 5 (1966), 365-385

- / 34 / KOSHLAND, D.E. : The molecular basis for enzyme regulation
The Enzymes, Vol. I, Ed. P.D. Boyer, Acad. Press
1970

- / 35 / KROGH, A. : The number and distribution of capillaries in
muscles with calculations of the oxygen pressure
head necessary for supplying the tissue
J. Physiol., 52 (1919), 409-415

- / 36 / LADYZHENSKAYA, O.A., URAL'TSEVA, N.N. :
Linear and quasilinear elliptic equations
Academic Press, 1967

- / 37 / LADYZHENSKAYA, O.A., SOLONNIKOV, V.A., URAL'TSEVA, N.N. :
Linear and quasilinear equations of parabolic type

- / 38 / LEHNINGER, A.L. : Bioenergetik
Georg Thieme Verlag, 1974
- / 39 / LEONARD, E.F., JØRGENSEN, S.B. :
The analysis of convection and diffusion in
capillary beds
Ann. Rev. Biophys. Bioeng., 3 (1974), 293-339
- / 40 / LEVITT, D. : Theoretical model of capillary exchange
incorporating interactions between capillaries
Am. J. Physiol., 220 (1971), 250-255
- / 41 / LIONS, J.L. : Quelques méthodes de résolution des problèmes
aux limites non linéaires
Dunod Gauthier-Villars, 1969
- / 42 / LIONS, J.L. : Perturbations singulières dans les problèmes
aux limites et en control optimal
Lecture Notes in Math. No. 323, Springer-Verlag
1973
- / 43 / LIONS, J.L., MAGENES, E. :
Non-homogenous boundary value problems and
applications I
Springer-Verlag, 1972
- / 44 / LIONS, J.L., MAGENES, E. :
Non-homogenous boundary value problems and
applications II
Springer-Verlag, 1972
- / 45 / LÜBBERS, D.W., GRUNEWALD, W. :
Interkapillärer Sauerstofftransport und Mikro-
zirkulation
Biologie II, Forschung und Information, Schriften-
reihe der RIAS-Funkuniversität, Colloquium-Verlag
1971

- / 46 / LÜBBERS, D.W., WODICK, R. :
Sauerstofftransport im Warmblüterorganismus
Umschau, 13 (1971), 486-492
- / 47 / LÜBBERS, D.W. : Exchange processes in the microcirculatory
bed
Handbuch der allgemeinen Pathologie III/7
Springer-Verlag, 1977
- / 48 / McCracken, T., BRULEY, D., RENEAU, D., BICHER, H., KNISELY, M. :
Systems analysis of transport processes in human
brain - Part II
Proc. of First Pacific Chem. Eng. Congress,
Kyoto, 1972, 137-143
- / 49 / METZGER, H. : Distribution of oxygen partial pressure in a
two-dimensional tissue supplied by capillary meshes
and concurrent and countercurrent systems
Math. Biosci., 5 (1969), 143-154
- / 50 / METZGER, H. : The influence of space-distributed parameters
on the calculation of substrate and gas exchange
in microvascular units
Math. Biosci., 30 (1976), 31-45
- / 51 / MONOD, J., WYMAN, J., CHANGEUX, J.P. :
On the nature of allosteric transitions :
A plausible model
J. Mol. Biol., 12 (1965), 88-118
- / 52 / NETTER, H. : Theoretische Biochemie
Springer-Verlag, 1959
- / 53 / PERUTZ, M.F. : Röntgenanalyse des Hämoglobins
Angew. Chemie, 75. Jahrgang Nr. 13 (1963), 589-595
- / 54 / PERUTZ, M.F. : Stereochemistry of cooperative effects in
hemoglobin
Nature, 228 (1970), 726-739

- / 55 / PICONÉ, M. : Sur un problème nouveau pour l'équation linéaire aux dérivées partielles de la théorie mathématique classique de l'élasticité
Colloque sur les équations aux dérivées partielles
Bruxelles, 1954
- / 56 / PROTTER, M.H., WEINBERGER, H.F. :
Maximum principles in differential equations
Prentice Hall, 1967
- / 57 / RENEAU, D., BRULEY, D., KNISELY, M. :
A mathematical simulation of oxygen release, diffusion and consumption in the capillaries and tissues of the human brain
Chem. Eng. in Biology and Medicine (D. Hersey), Plenum Press, 1967, 135-241
- / 58 / RENEAU, D., BRULEY, D., KNISELY, M. :
A digital simulation of transient oxygen transport in capillary-tissue systems (cerebral grey matter)
J. Am. Inst. Chem., 15 (1969), 916-925
- / 59 / RENEAU, D., BRULEY, D., KNISELY, M. :
A computer simulation for prediction of oxygen limitations in cerebral grey matter
J. Assoc. Adv. Med. Instr., 4 (1970), 211-223
- / 60 / ROUGHTON, F. : Diffusion and chemical reaction velocity in cylindrical and spherical systems of physiological interest
Proc. Roy. Soc., 14 (1952), 203-229
- / 61 / ROUGHTON, F., DELAND, E.C., KERNOHAN, I.C., SEVERINGHAUS, J.W. :
Some recent studies of the oxyhaemoglobin dissociation curve of human blood under physiological conditions and the fitting of the Adair equation to the standard curve
Alfred-Benzon-Symposium IV: Oxygen affinity of hemoglobin and red cell acid base status
(M. Rørth, P. Astrup), Copenhagen, 1972, 73-83

- / 62 / SCHECHTER, M. : A generalization of the problem of transmission
Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. III Vol. 14 (1960),
207-235
- / 63 / SCHMIDT, R.F., THEWS, G. :
Einführung in die Physiologie des Menschen
Springer-Verlag, 1976
- / 64 / SPAAN, J. : Oxygen transfer in layers of hemoglobin solution
Dissertation, Eindhoven, 1976
- / 65 / STAMPACCHIA, G. : Contributi alla regolarizzazione delle
soluzioni dei problemi al contorno per equazioni
del secondo ordine ellittiche
Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. III Vol. 12 (1958),
223-245
- / 66 / STAMPACCHIA, G. : Su un problema relativo alle equazioni
di tipo ellittico del secondo ordine
Ric. di Mat., 5 (1956), 1-22
- / 67 / STARLINGER, H., LÜBBERS, D.W. :
Polarographic measurements of the oxygen pressure
performed simultaneously with optical measurements
of the redox state of the respiratory chain in
suspensions of mitochondria under steady-state
conditions at low oxygen tensions
Pflügers Arch., 341 (1973), 15-22
- / 68 / THEWS, G. : Über die mathematische Behandlung physiologischer
Diffusionsprozesse
Diplomarbeit, Kiel, 1950
- / 69 / THEWS, G. : Über die mathematische Behandlung physiologischer
Diffusionsprozesse in zylinderförmigen Objekten
Acta Biotheor.(Leiden), 10 (1953), 105-130

- / 70 / THEWS, G. : Die Sauerstoffdiffusion im Gehirn
Pflügers Arch., 271 (1960), 197-226
- / 71 / TROISI, M. : Su un problema di trasmissione
Ric. di Mat., 11 (1962), 24-50
- / 72 / TROISI, M. : Sui problemi di trasmissione per due equazioni
ellittiche di ordine diverso
Ric. di Mat., 12 (1963), 216-247
- / 73 / TROISI, M. : Sulle regolarizzazioni delle soluzioni di
taluni problemi di trasmissione
Ric. di Mat., 13 (1964), 281-316
- / 74 / WHITMORE, R.L. : Rheology of the circulation
Pergamon Press, 1968
- / 75 / ZEIDLER, E. : Vorlesungen über nichtlineare Funktional-
analysis II - Monotone Operatoren -
Teubner Verlagsgesellschaft, 1977

LEBENS LAUF

- 15.4.1950 geboren in Obertsrot (Baden)
- 1957 - 1961 Besuch der Karls-Glück-Grundschule in Dortmund
- 1961 - 1963 Besuch der Wilhelm-Röntgen-Realschule in Dortmund
- 1963 - 1969 Besuch des Helmholtz-Gymnasiums in Dortmund
- 6.6.1969 Reifeprüfung
- 1969 - 1974 Studium der Mathematik und Elektrotechnik an
der Ruhr-Universität Bochum
- 14.6.1974 Diplomprüfung in Mathematik
- 1974 - 1976 Zivildienst (MPI f. Systemphysiologie)
- 1976 - 1979 wissenschaftlicher Assistent am Max-Planck-
Institut für Systemphysiologie in Dortmund

Koffler-Druck · Schwanenstraße 30 · 4600 Dortmund 1 · Ruf 52 30 34